Задача 1. Составить уравнение нормали (к данной кривой в точке с абсциссой x_0.

Дано: $y = x - x^3, x_0 = -1$

Решение.

$$y' = 1 - 3x^2, y(x_0) = 0, \Rightarrow y'(x_0) = -2,$$

$y - y(x_0) = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$ -уравнение нормали,

$$y = \frac{1}{2}(x+1), \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Задача 2. Найти дифференциал dy. Дано: $y = tg(2\arccos\sqrt{1-2x^2}), x > 0.$

Решение.

$$dy = \left(\frac{1}{\cos^2(2\arccos\sqrt{1-x^2}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{1-(1-2x^2}} \cdot \frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\cos^2(2\arccos\sqrt{1-2x^2})} \cdot \frac{4x}{\sqrt{2x^2} \cdot \sqrt{1-2x^2}} dx = \frac{4}{\sqrt{2}\cos^2(2\arccos\sqrt{1-2x^2}) \cdot \sqrt{1-2x^2}} dx.$$

Задача 3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала: $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 1{,}21$.

Решение. Выберем $x_0 = 1,$ следовательно $\Delta x = 0{,}21.$

$$y(x) = y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + y'(x_0)\Delta x. \Rightarrow y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

$$y(x_0) = 1,\ \ y'(x_0) = \frac{1}{3}, \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}21 = 1{,}07.$$

Задача 4. Найти производную функции : $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$.

Решение.

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x\sqrt{1-3x^4} - \frac{-12x^3 \cdot x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}}{1-3x^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x(1-3x^4) + 12x^5}{2\sqrt{(1-3x^4)^3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x - 12x^5 + 12x^5}{2\sqrt{(1-3x^4)^3}} = \frac{x}{\sqrt{(1-3x^4)^3}}.$$

Задача 5. Найти производную функции : $y = x + \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x).$

Решение.

$$y' = 1 + \frac{0 - e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Задача 6. Найти производную: $y = \ln^3(1+\cos x)$

Решение.

$$y' = 3\ln^2(1+\cos x) \cdot \frac{-\sin x}{1+\cos x} = \frac{-3\sin x \ln^2(1+\cos x)}{1+\cos x}.$$

Задача 7. Найти производную: $y = ctg(\cos 5) - \frac{1}{40}\frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$.

Решение.

$$y' = 0 - \frac{1}{40}\cdot\frac{2\cdot 20\cos 2x(-\sin 20x)\sin 40x - 40\cos^2 20x\cos 40x}{\sin^2 40x} =$$

$$= -\frac{1}{40}\cdot\frac{-40\cos 20x\sin 20x\sin 40x - 40\cos^2 20x\cos 40x}{\sin^2 40} = \frac{\sin^2 40x + 2\cos^2 20x\cos 40x}{2\sin^2 40x}.$$

Задача 8. Найти производную: $y = arctg\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

Решение.

$$y' = \frac{1}{1+\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^2}}\cdot\frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2+(\sqrt{1+x^2}-1)^2}\cdot\frac{x^2-(1+x^2)-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{-1-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\,(x^2+(\sqrt{1+x^2}-1)^2}.$$

Задача 9. Найти производную: $y = \frac{shx}{1+chx}$.

Решение.

$$y' = \frac{chx(1+chx)-sh^2x}{(1+chx)^2}.$$

Задача 10. Найти производную: $y = x^{\sin x^3}$.

Решение.

$$y' = x^{\sin x^3}\left(3\cos(x^3)\cdot x^2\cdot\ln x + \frac{\sin x^3}{x}\right).$$

Задача 11. Найти производную: $y = \frac{4x+1}{16x^2+8x+3} + \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{4x+1}{\sqrt{2}}$.

Решение.

$$y' = \frac{4(16x^2+8x+3)-(4x+1)(32x+8)}{(16x^2+8x+3)^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1+\frac{(4x+1)^2}{2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{-64x^2-32x+4}{(16x^2+8x+3)^2} + \frac{4}{2}\cdot\frac{2}{2+(4x+1)^2} = \frac{-64x^2-32x+4}{(16x^2+8x+3)^2} + \frac{1}{2+16x^2+8x+1} =$$

$$= \frac{-64x^2-32x+4+16x^2+8x+3}{(16x^2+8x+3)^2} = \frac{-48x^2-24x+7}{(16x^2+8x+3)^2}.$$

Задача 12. Найти производную: $y = 2\arcsin\frac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2+24x+12}$,

Решение.

$$y' = 2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{(3x+4)^2}}}\cdot\frac{-2\cdot 3}{(3x+4)^2} + \frac{18x+24}{2\sqrt{9x^2+24x+1)^2}} = 2\cdot\frac{3x+4}{\sqrt{9x^2+24x+16-4}}\cdot\frac{-6}{(3x+4)^2} +$$

$$+\frac{-12}{(3x+4)\sqrt{9x^2+24x+12}} = \frac{-12}{(3x+4)\sqrt{9x^2+24x+12}} + \frac{9x+12}{\sqrt{9x^2+24x+12}} =$$

$$= \frac{-12+(9x+12)(3x+4)}{(3x+4)\sqrt{9x^2+24x+12}} = \frac{27x^2+72x+36}{(3x+4)\sqrt{9x^2+24x+12}}.$$

Задача 13. Найти производную: $y = \frac{1}{\sin\alpha}\ln(tgx + ctg\alpha)$.

Решение.

$$y' = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{tgx+ctg\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin\alpha\cos^2 x(tgx+ctg\alpha)}.$$

Задача 14. Найти производную y'_x, если : $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = tg\sqrt{1+t}. \end{cases}$

Решение. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, $x'(t) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, \Rightarrow y(t) = \frac{1}{\cos^2\sqrt{1+t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+t}} = \frac{1}{2\sqrt{1+t}\cos^2\sqrt{1+t}}$.

$$y'_x = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{2t\sqrt{1+t}\cos^2\sqrt{1+t}}.$$

Задача 15. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t = t_0$.

Дано: $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3, t_0 = 0. \end{cases}$, $\begin{cases} x(t_0) = 0, \\ y(t_0) = 0. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} x' = t - t^3, \\ y' = t + t^2. \end{cases}$

$y'_x(t_0) = 1,\ y - 0 = 1(x-0),$

$y = x$ - уравнение касательной,

$y - 0 = -1(x-0)$

$y = -x$ - уравнение нормали.

Задача 16. Найти производную n -го порядка. Дано: $y = a^{3x}$.

Решение.

$$\mathrm{y}' = 3\mathrm{a}^{3\mathrm{x}}\ln\mathrm{a},\ \mathrm{y}'' = 9\mathrm{a}^{3\mathrm{x}}\ln^2\mathrm{a},\ \mathrm{y}^{(\mathrm{n})} = 3^{\mathrm{n}}\mathrm{a}^{3\mathrm{x}}(\ln\mathrm{a})^{(\mathrm{n})}.$$

Задача 17. Найти производную пятого порядка: $y = (2x^2 - 7)\ln(x-1)$,

Решение.

$$y' = 4x\ln(x-1) + \frac{2x^2 - 7}{x-1},$$

$$y'' = 4\ln(x-1) + \frac{4x}{x-1} + \frac{4x(x-1) - (2x^2 - 7)}{(x-1)^2} = 4\ln(x-1) + \frac{4x}{x-1} + \frac{2x^2 - 4x + 7}{(x-1)^2},$$

$$y''' = \frac{4}{x-1} + \frac{4(x-1) - 4x}{(x-1)^2} + \frac{(4x-4)(x-1)^2 - 2(x-1)(2x^2 - 4x + 7)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{4}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{10}{(x-1)^3},$$

$$y^{IV} = -\frac{4}{(x-1)^2} + \frac{8}{(x-1)^3} + \frac{30}{(x-1)^4},$$

$$y^{V} = \frac{8}{(x-1)^3} - \frac{24}{(x-1)^4} - \frac{120}{(x-1)^5}.$$

Задача 18. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = 1/t. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} x' = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, \\ y = -\dfrac{1}{t^2}. \end{cases}$ $y'_x = -\dfrac{1}{t^2}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right) = \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}$. $y''_{xx} = \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right) = -\dfrac{1-t^2}{t^4}$

Задача 19. Показать, что функция y удовлетворяет данному уравнению.

Дано: $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $xy' + y = \cos x$.

Решение. $y' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. $\dfrac{\mathrm{x}\cos\mathrm{x} - \sin\mathrm{x}}{\mathrm{x}} + \dfrac{\sin\mathrm{x}}{\mathrm{x}} = \cos\mathrm{x}, \Rightarrow \dfrac{\mathrm{x}\cos\mathrm{x} - \sin\mathrm{x} + \sin\mathrm{x}}{\mathrm{x}} = \cos\mathrm{x}$,

$\cos\mathrm{x} = \cos\mathrm{x}, \Rightarrow 0 = 0.$