Задача 1. Решить уравнение: $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0.$

Решение.

$$y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}=-1,\Rightarrow \frac{dy}{dx}y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}=-1,\Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\Rightarrow -\sqrt{1-y^2}=-\arcsin x+C,$$

$$C=\arcsin x-\sqrt{1-y^2}.$$

Задача 2. Решить дифференциальное уравнение : $y'=\dfrac{x+2y}{2x-y}.$

Решение. Разделим числитель и знаменатель на x:

$$y'=\frac{1+2\dfrac{y}{x}}{2-\dfrac{y}{x}},$$

Введем замену $\dfrac{y}{x}=u\Rightarrow y=ux\Rightarrow y'=u+u'x.$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+2u}{2-u},\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2-u},\Rightarrow \frac{2-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x},\Rightarrow$$

$$\int\left(\frac{2}{1+u^2}-\frac{u}{1+u^2}\right)du=\int\frac{dx}{x},$$

$$2\operatorname{arctg}u-\frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right|=\ln|x|+\ln C,\Rightarrow 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{y^2}{x^2}\right|=\ln|x|+\ln C.$$

Задача 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения : $y'=\dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}.$

Решение. Пусть : $\begin{cases}x=x_1+k\\ y=y_1+n\end{cases}$, , тогда $y_1'=\dfrac{x_1+2y_1+k+2n-3}{4x_1-y_1+4k-n-3}.$

Пусть $\begin{cases}k+2h-3=0\\ 4k-h-3=0\end{cases},\Rightarrow \begin{cases}k=1\\ h=1\end{cases}.$ Тогда $y_1'=\dfrac{x_1+2y_1}{4x_1-y_1},\Rightarrow y_1'=\dfrac{1+2\dfrac{y_1}{x_1}}{4-\dfrac{y_1}{x_1}}.$

Введем замену $\dfrac{y_1}{x_1}=u\Rightarrow y_1=ux_1\Rightarrow y_1'=u+u'x_1.$

$$u+u'x_1=\frac{1+2u}{4-u},\Rightarrow u'x_1=\frac{1-2u+u^2}{4-u},\Rightarrow \frac{du}{dx}x_1=\frac{(1-u)^2}{4-u},\Rightarrow \frac{4-u}{(u-1)^2}du=\frac{dx_1}{x_1},$$

$$\int\left(\frac{1-u}{u^2-2u+1}+\frac{3}{(u-1)^2}\right)du=\int\frac{dx_1}{x_1},$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|u^2-2u+1\right|-\frac{3}{u-1}=\ln\left|x_1\right|+C,\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|(u-1)^2\right|-\frac{3}{u-1}=\ln\left|x_1\right|+C,\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{y_1}{x_1}-1\right)^2\right|-\frac{x_1}{y_1-x_1}=\ln\left|x_1\right|+C,\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(y-x)^2}{(x-1)^2}\right|-\frac{x-1}{y-x}=\ln\left|x-1\right|+C.$$

Задача 4. Найти решение задачи Коши: $y'-y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\ y(0)=0.$

Решение. Имеем уравнение вида $y'+P(x)y=f(x)$, Пусть $y=uv.$

Разделим переменные в этом дифференциальном уравнении относительно функции v, находим

$$v=e^{-\int P(x)dx}=e^{-\int \cos x dx}=e^{-\sin x}.$$

$$u=\frac{1}{2}\int\frac{\sin 2x}{e^{-\sin x}}dx=\frac{1}{2}\int e^{\sin x}\sin 2x dx=\int e^{\sin x}\sin x\cos x dx=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos x dx=dt\end{matrix}\right|=\int e^t dt=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=t\\ du=dt\\ dv=e^t dt\\ v=e^t\end{matrix}\right|=te^t-\int e^t dt=te^t-e^t+C=\sin xe^{\sin x}-e^{\sin x}+C.$$

$$y=e^{-\sin x}(\sin xe^{\sin x}-e^{\sin x}+C),$$
$$y(0)=0\Rightarrow 0=1\cdot(0\cdot 1-1+C)\Rightarrow C=1.$$
$$y=e^{-\sin x}(\sin xe^{\sin x}-e^{\sin x}+1).$$

Задача 5. Решить задачу Коши: $y^2dx+(xy-1)dy=0,\ y_{|x=1}=e.$

Решение. $y^2\frac{dx}{dy}+(xy-1)=0,\Rightarrow \frac{dx}{dy}+\frac{x}{y}-\frac{1}{y^2}=0.$

Пусть $x=uv.$

$$\frac{dx}{dy}=u'v+uv',\Rightarrow u'v+uv'+\frac{uv}{y}-\frac{1}{y^2}=0,\Rightarrow u\left(v'+\frac{v}{y}\right)+u'v-\frac{1}{y^2}=0.$$

Разделим переменные в этом дифференциальном уравнении относительно функции v, находим

1) $v'+\frac{v}{y}=0,\frac{dv}{dy}=-\frac{v}{y},\ \ \frac{dv}{v}=-\frac{dy}{y},\ln v=-\ln y\Rightarrow v=\frac{1}{y}.$

2) $u'v-\frac{1}{y^2}=0,$

$$u'\frac{1}{y}=\frac{1}{y^2},\Rightarrow\frac{du}{dy}=\frac{1}{y},\Rightarrow du=\frac{dy}{y},\Rightarrow u=\ln y+C,$$

$x=\frac{1}{y}(\ln y+C)$ -общее решение ДУ.

$y_{|x=1}=e\Rightarrow C=e-1;$

$x=\frac{1}{y}(\ln y+e-1)$ -частное решение ДУ.

Задача 6. Найти решение задачи Коши: $3(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 3.$

Решение. Запишем уравнение в виде $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2 \ln x}{3x}$.

Пусть $y = uv, \Rightarrow u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{u^2v^2 \ln x}{3x}$.

1) Пусть $v' + \frac{v}{x} = 0,$ тогда

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \Rightarrow \ln v = -\ln x \Rightarrow v = \frac{1}{x}.$$

2) $u'v = \frac{u^2v^2 \ln x}{x}$,

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{u^2 \ln x}{x^3}, \Rightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx, \Rightarrow -\frac{1}{u} = -\frac{\ln x - 1}{x} + C, \Rightarrow u = \frac{x}{\ln x - 1 - Cx}, \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{\ln x - 1 - Cx},$$

$$y(1) = 3 \Rightarrow C = -2/3.$$

$$y = \frac{3}{3\ln x + 2x - 3}.$$

Задача 7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения: $(y^2 + y\sec^2 x)dx + (2xy + tgx)dy = 0.$

Решение. $P(x, y) = y^2 + y\sec^2 x, Q(x, y) = 2xy + tgx,$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y + \sec^2 x = 2y + \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + \frac{1}{\cos^2 x},$$ тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

$$u(x, y) = \int (2xy + tgx)dy = xy^2 + ytgx + \varphi(x),$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y^2 + y\sec^2 x = y^2 + y\sec^2 x + \varphi'(x).$$

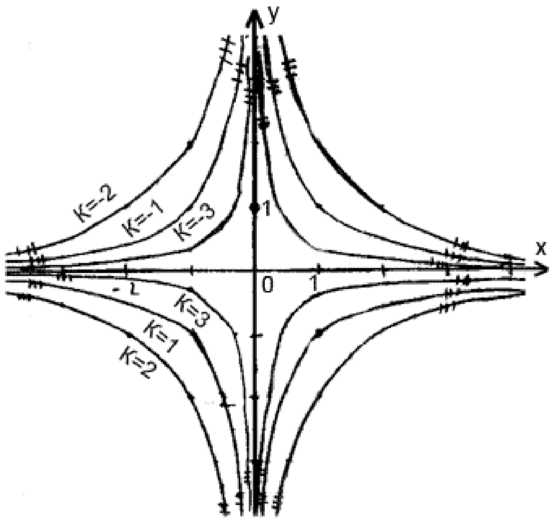
$$\varphi'(x) = 0,$$

$$\varphi(x) = C.$$

$$u(x, y) = xy^2 + ytgx = C.$$

Задача 8. Для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку. Дано уравнение : $y' = xy, M(0,1)$.

Решение. $y' = k = const \Rightarrow k = xy,\ y = \frac{k}{x}$, т.е. гипербола.



Задача 9. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y''' ctg 2x + 2y'' = 0.$

Решение. Выполним замену: $y'' = z(x), \Rightarrow y''' = z'(x)$. Тогда

$$z' \mathrm{ctg} 2x + 2z = 0, \Rightarrow z' + 2\frac{z}{\mathrm{ctg} 2x} = 0.$$

Предположим, что $z = uv.$

$$u'v + uv' + 2\frac{uv}{\mathrm{ctg} 2x} = 0, \Rightarrow u'v + u\left(v' + 2\frac{v}{\mathrm{ctg} 2x}\right) = 0.$$

Пусть $v' + 2\frac{v}{ctg 2x} = 0.$ Тогда

$$\frac{dv}{dx} = -2\frac{v}{\mathrm{ctg} 2x}, \Rightarrow \frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{\mathrm{ctg} 2x},\ \ln v = \ln\cos 2x \Rightarrow v = \cos 2x.$$

$$u'v = 0, \Rightarrow \frac{du}{dv}\cos 2x = 0, \Rightarrow u = C_1, \Rightarrow z = C_1\cos 2x.$$

$$y' = \int C_1 \cos 2x dx = \frac{1}{2}C_1 \sin 2x + C_2.$$

$$y = \int\left(\frac{1}{2}C_1 \sin 2x + C_2\right)dx = -\frac{1}{4}C_1\cos 2x + C_2 x + C_3.$$

Задача 10. Найти решение задачи Коши: $y'' = 72y^3, y(2) = 1, y'(2) = 6.$

Решение. Замена: $y' = z(y), \Rightarrow y'' = z'(y)\cdot z(y).$

$$z'_y z = 72y^3, \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}z = 72y^3, \Rightarrow \int z\partial z = 72\int y^3 \partial y,$$

$$\frac{1}{2}z^2 = 18y^4 + C_1, \Rightarrow z^2 = 36y^4 + 2C_{1.} \Rightarrow z^2 = (y')^2 \Rightarrow (y')^2 = 36y^4 + 2C_1 \Rightarrow 36 = 36 + 2C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$y' = \sqrt{36y^4}, \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{36y^4}, \Rightarrow \frac{dy}{6y^2} = \int dx, \Rightarrow y = -\frac{1}{6(x + C_2)}$$

$$x = 2, y = 1,\ 1 = -\frac{1}{6(2 + C_2)} \Rightarrow C_2 = -\frac{13}{6}.\ \ y = -\frac{1}{6x - 13}.$$

Задача 11. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$.

Решение. Решение будем искать в виде суммы общего решение и частного: $y_{ОН} = y_{ОО} + y_{ЧН}$.

Решим сразу однородное уравнение. Составим для него характеристическое уравнение:

$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$ -характеристическое уравнение.

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2,$

$y_{ОО} = C_1 + C_2 + C_3 e^{-x}$ -общее решение однородного уравнения.

Найдем теперь частное решение неоднородного уравнения.

$$
\begin{aligned}
&y_{чн} = (Ax^2 + Bx + C)x, \Rightarrow y_{чн} = Ax^3 + Bx^2 + Cx,\\
&y' = 3Ax^3 + Bx^2 + C, \Rightarrow y'' = 6Ax + 2B, \Rightarrow y''' = 6A,\\
&6Ax^2 + 4Bx + 2C + 18Ax + 6B + 6A = 1 - x^2,\\
&6Ax^2 + x(18A + 4B) + 6A + 6B + 2C = 1 - x^2.
\end{aligned}
$$

$$6A = -1 \Rightarrow A = -\frac{1}{6}, \Rightarrow 18A + 4B = 0 \Rightarrow B = \frac{4}{13}, \Rightarrow 6A + 6B + 2C = 1 \Rightarrow C = -3.$$

Отсюда $y_{ЧН} = x\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x - 3\right)$- частное решение неоднородного уравнения.

Общее решение

$$y_{ОН} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 3x.$$

Задача 12. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$.

Решение. $y_{ОН} = y_{ОО} + y_{ЧН}$.

Найдем общее решение одноронного уравнения.

$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda = 0$ -характеристическое уравнение.

$\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 1,$

$y_{ОО} = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)e^x$ -общее решение однородного уравнения.

Найдем теперь частное решение неоднородного:

$$
\begin{aligned}
&y_{чн} = (Ax + B)x^2 e^{-x}, \Rightarrow y_{чн} = (Ax^3 + Bx^2)e^{-x},\\
&y' = (-Ax^3 - Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx)e^{-x},\\
&y'' = (Ax^3 + Bx^2 - 6Ax^2 - 4Bx + 6Ax + 2B)e^{-x},\\
&y''' = (-Ax^3 - Bx^2 + 9Ax^2 + 6Bx - 18Ax - 6B + 2B)e^{-x},\\
&-10Ax^3 + x^2(48A - 10B) + x(34B - 42A) + 6A - 14B = 16 - 12x.
\end{aligned}
$$

$$-42A + 34B = -12 \Rightarrow A = \frac{7}{16}, \Rightarrow 6A - 14B = 0 \Rightarrow B = \frac{3}{16}.$$

Отсюда $y_{ЧН} = \frac{1}{16}\left(7x^3 + 3x^2\right)e^{-x}$ - частное решение неоднородного уравнения.

Общее решение $y_{ОН} = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)e^x + \frac{1}{16}\left(7x^3 + 3x^2\right)e^{-x}$.

Задача 13. Найти общее решение дифференциального уравнения. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x.$

Решение. $y_{ОН} = y_{ОО} + y_{ЧН}$.

$\lambda^2 + \lambda = 0$ -характеристическое уравнение. Его корни: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1,$

$y_{ОО} = C_1 + C_2 e^{-x}$ -общее решение однородного уравнения.

$$\mathrm{y_{чн}} = \mathrm{A}\cos 7\mathrm{x} + \mathrm{B}\sin 7\mathrm{x}, \Rightarrow \mathrm{y}' = -7\mathrm{A}\sin 7\mathrm{x} + 7\mathrm{B}\cos 7\mathrm{x}, \Rightarrow \mathrm{y}'' = -49\mathrm{A}\cos 7\mathrm{x} - 49\mathrm{B}\sin 7\mathrm{x},$$

$$-49\mathrm{A}\cos 7\mathrm{x} - 49\mathrm{B}\sin 7\mathrm{x} - 7\mathrm{A}\sin 7\mathrm{x} + 7\mathrm{B}\cos 7\mathrm{x} = 2\cos 7\mathrm{x} + 3\sin 7\mathrm{x},$$

$$(7\mathrm{B} - 49\mathrm{A})\cos 7\mathrm{x} + (-7\mathrm{A} - 49\mathrm{B})\sin 7\mathrm{x} = 2\cos 7\mathrm{x} + 3\sin 7\mathrm{x}.$$

$$\begin{cases} 7\mathrm{B} - 49\mathrm{A} = 2, \\ -7\mathrm{A} - 49\mathrm{B} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = -\dfrac{17}{350}, \\ \mathrm{B} = -\dfrac{133}{2450} \end{cases}.$$

Отсюда $y_{ЧН} = -\dfrac{17}{350}\cos 7x - \dfrac{133}{2450}\sin 7x$ - частное решение неоднородного уравнения.

Общее решение

$$y_{ОН} = C_1 + C_2 e^{-x} - \frac{17}{350}\cos 7x - \frac{133}{2450}\sin 7x.$$

Задача 14. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x$.

$y_{ОН} = y_{ОО} + y_{ЧН}$.

$\lambda^2 + \lambda = 0$ -характеристическое уравнение.

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1,$

$y_{ОО} = C_1 + C_2 e^{-x}$ -общее решение однородного уравнения.

$$y_{ЧН} = A\cos x + B\sin x + Ce^x,$$

$$y' = -A\sin x + B\cos x + Ce^x,$$

$$y'' = -A\cos x - B\sin x + Ce^x,$$

$$-A\cos x - B\sin x + Ce^x + A\cos x + B\sin x + Ce^x = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x,$$

$$2Ce^x = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x.$$

$$2C = 2 \Rightarrow C = 1.$$

Отсюда $y_{ЧН} = e^x$ - частное решение неоднородного уравнения.

Общее решение

$$y_{ОН} = C_1 + C_2 e^{-x} + e^x.$$