

**КРАТКИЙ КУРС  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА,  
ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ**

*УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ*

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### РАЗДЕЛ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Элементы теории множеств.....	5
2. Вещественные и комплексные числа. Метрические пространства .....	8
2.1. Вещественные числа	8
2.2. Комплексные числа	9
2.3. Метрические пространства	10
3. Числовые последовательности и ряды.....	12
3.1. Числовые последовательности	12
3.2. Числовые ряды	13
3.3. Признаки сходимости рядов со знакопостоянными членами	14
3.4. Признаки сходимости Даламбера, Коши и Лейбница	16
4. Степенные ряды .....	17
5. Числовые функции. Предел и непрерывность функции .....	19
5.1. Числовая функция	19
5.2. Предел и непрерывность функции	20
6. Дифференцирование функций одного переменного.....	22
6.1. Понятие производной	22
6.2. Исследование функций.	25
7. Неопределенный и определенный интегралы .....	27
7.1. Первообразная и неопределенный интеграл	27
7.2. Определенный интеграл	28

### РАЗДЕЛ 2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

8. Векторы. Операции над векторами .....	33
9. Линейно независимые системы векторов. Базис. Системы координат.....	34
10. Матрицы и определители.....	37
11. Системы линейных уравнений. Правило Крамера.....	38

РАЗДЕЛ 3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
ПРОГРАММИРОВАНИЕ

12. Функции нескольких переменных.	
Частные производные .....	39
13. Локальный экстремум функции.....	42
14. Условный экстремум. Метод Лагранжа .....	44
15. Основные понятия линейного программирования.	
Симплекс-метод. Транспортная задача.....	46
16. Задачи нелинейного и динамического программирования....	56
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	63

# РАЗДЕЛ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

## 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Под множеством понимают некоторую совокупность элементов, объединенных по определенным признакам.

Примеры:

1. Совокупность студентов в данной аудитории образует множество.

2. Все целые положительные числа  $1, 2, \dots, n, \dots$  образуют множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$ .

Множества состоят из элементов. Принадлежность элемента  $x$  множеству  $A$  записывается следующим образом:  $x \in A$ . Если элемент  $x$  не принадлежит множеству  $A$ , то это записывается:  $x \notin A$ .

Множество  $B$  называется подмножеством множества  $A$ , если все элементы множества  $B$  являются элементами множества  $A$ . То, что  $B$  является подмножеством множества  $A$ , записывается так:  $B \subset A$  (рис. 1).

**Множество  $A$**

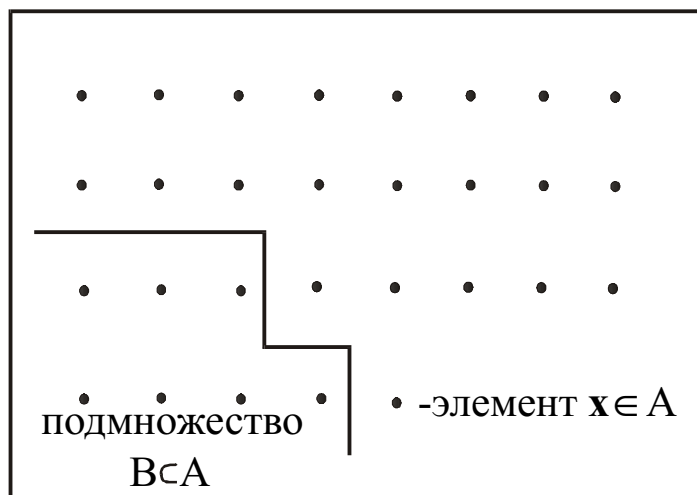


Рис. 1. Геометрическое изображение множества  $A$  и подмножества  $B$

Введем понятие пустого множества, т.е. множества, в котором не содержится ни одного элемента. Пустое множество

обозначается символом  $\emptyset$ . Пустое множество содержится в любом множестве, т.е.  $\emptyset \subset A$ .

Объединением (суммой) множеств  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) называется множество  $S$ , которое состоит из всех элементов множеств  $A_k$ , т.е. если  $x \in S$ , то  $x \in A_k$  хотя бы при одном  $k$ .

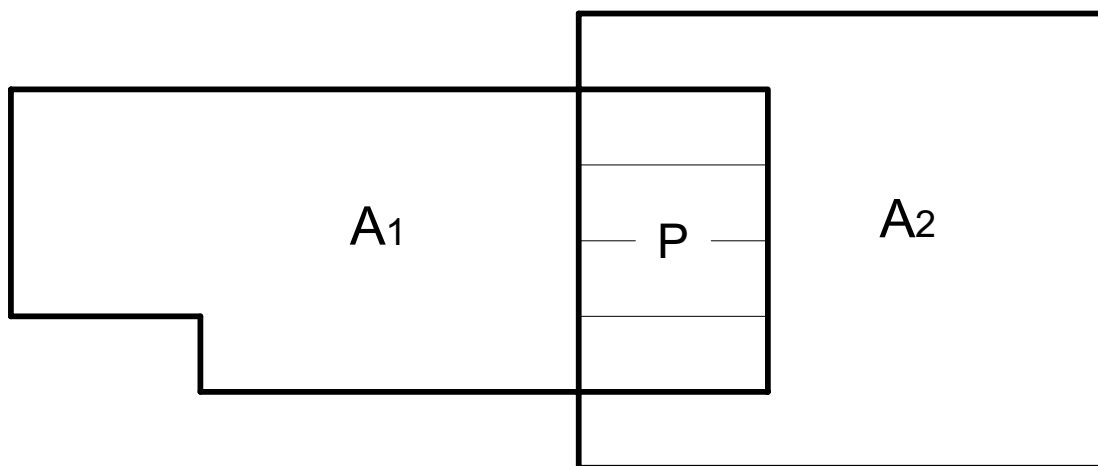
Объединение множеств  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) обозначается символом

$$S = \bigcup_{k=1}^n A_k \quad (1.1)$$

Пересечением (произведением) множеств  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) называется множество  $P$ , которое состоит из элементов, принадлежащих одновременно всем множествам  $A_k$ , т.е. если  $x \in P$ , то  $x \in A_k$  при всех  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Пересечение множеств  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) (рис. 2) обозначается символом

$$P = \bigcap_{k=1}^n A_k \quad (1.2)$$



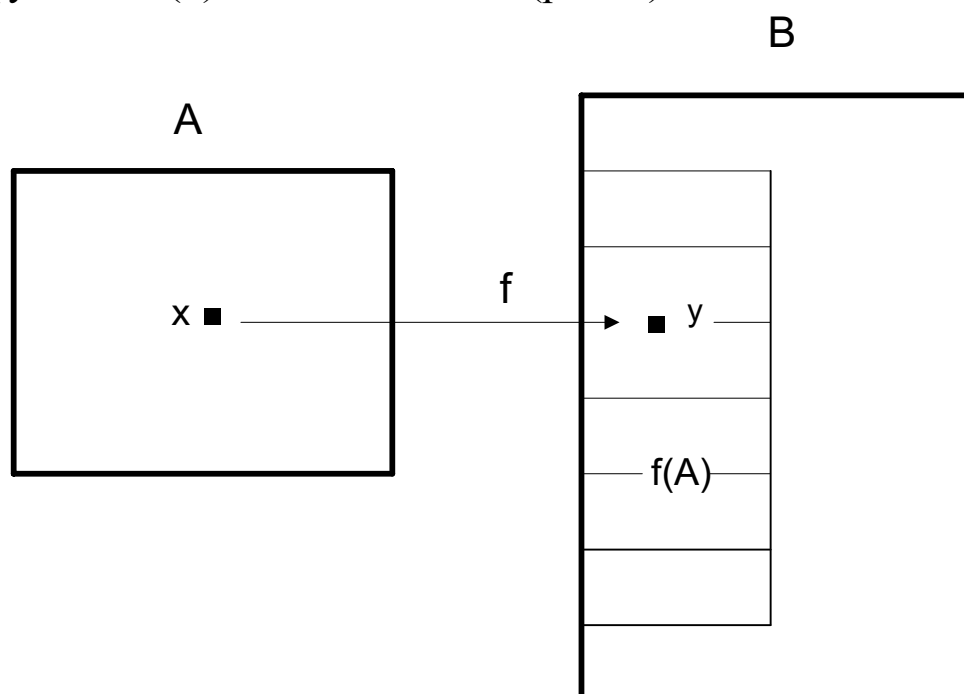
*Рис. 2. Геометрическое изображение пересечения множеств  $A_1$  и  $A_2$*

Пример:

Пусть  $A_1$  – множество студентов-девушек,  $A_2$  – множество студентов-юношей в группе. Объединение  $S = A_1 \cup A_2$  – множество студентов.

Рассмотрим два множества  $A$  и  $B$ . Пусть каждому элементу  $x \in A$  поставлен в соответствие определенный элемент  $y \in B$ . Обозначим такое соответствие так:  $y = f(x)$ .

Соответствие  $f$  будем называть отображением множества  $A$  в множество  $B$  (или функцией из множества  $A$  в множество  $B$ ). Множество  $A$  называется областью определения функции  $y = f(x)$ . Будем называть  $f(A)$  множеством значений функции  $f(x)$  на множестве  $A$  (рис. 3).



*Рис. 3. Множества  $A$  и  $B$ . Множество значений  $f(A)$*

Если  $f(A) = B$  и  $f(x_1) \neq f(x_2)$  при любых  $x_1, x_2 \in A$  и  $x_1 \neq x_2$ , то отображение  $f$  множества  $A$  на множество  $B$  называется взаимно однозначным. В этом случае на множестве  $B = f(A)$  можно определить функцию  $x = g(y)$ , которая ставит каждому элементу  $y \in B$  определенный элемент  $x \in A$ . Эта функция называется обратной ( по отношению к  $f(x)$ ).

Множества  $A$  и  $B$  называются эквивалентными, если существует взаимно однозначное отображение множества  $A$  на множество  $B$ . Эквивалентность множеств  $A$  и  $B$  записывается символом  $A \sim B$ .

Множество  $A$  называется счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел  $N$ .

## 2. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

### 2.1. вещественные числа

Натуральные числа  $N$ :  $1, 2, \dots, n, \dots$  – целые положительные числа.

Целые числа  $Z$ :  $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  – все отрицательные и положительные целые числа и ноль.

Рациональные числа  $Q$  можно представить в виде  $q = p/n$ , где  $p$  и  $n$  – целое и натуральное число.

Рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, т.е.

$$q = a_0, a_1, \dots, a_n \text{ или } q = a_0, a_1, \dots, a_n(a_n) \quad (2.1)$$

Иррациональные числа  $Z$  представимы только в виде бесконечных непериодических десятичных дробей, т.е.

$$z = a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \quad (2.2.)$$

К иррациональным числам относятся:

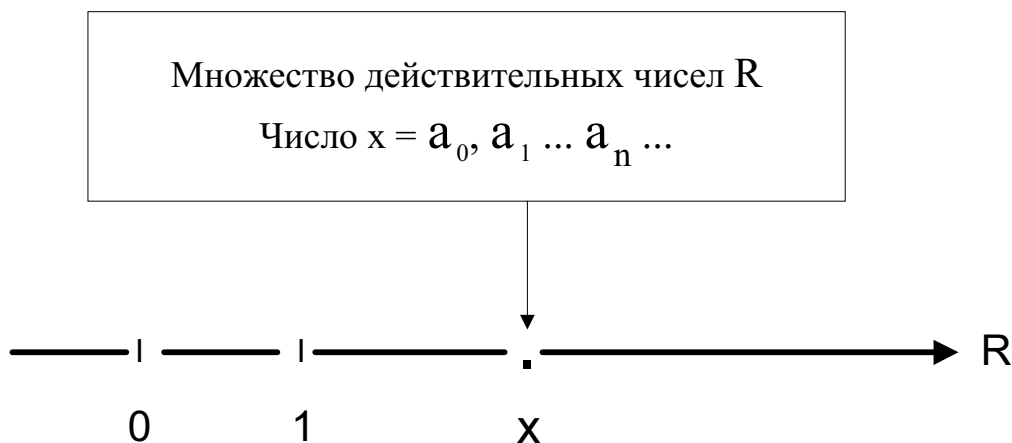
1. Основание натурального логарифма  $e \approx 2,7182\dots$

2. Число  $\pi \approx 3,14159\dots$

Все рациональные и иррациональные числа образуют множество вещественных чисел  $R$ .

Между вещественными числами и точками числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие, т.е. каждой точке числовой прямой можно всегда указать определенное вещественное число и наоборот (рис. 4).





*Рис.4. Взаимно однозначное соответствие между вещественными числами и точками прямой*

## 2.2. Комплексные числа

Комплексным числом  $z$  называется упорядоченная пара  $(x, y)$  вещественных чисел  $x$  и  $y$ .

Два комплексных числа  $z_1 = (x_1, y_1)$  и  $z_2 = (x_2, y_2)$  называются равными в том и только в том случае, когда  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ .

Сумма и произведение комплексных чисел  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$  определяются соответственно равенствами:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \\ z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Введем обозначение  $\mathbf{i} = (0, 1)$ . В силу (2.3)  $\mathbf{i}^2 = -1$ . Тогда любое комплексное число можно записать в виде

$$z = x + iy. \quad (2.4)$$

Вещественное число  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  называется модулем комплексного числа  $z$ .

Пусть  $z = x + iy$ . Введем угол  $\varphi$  следующими соотношениями:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi. \quad (2.5)$$

Угол  $\varphi$  называется аргументом комплексного числа  $z$ .

С учетом (2.5) комплексное число  $z$  можно представить в тригонометрической форме

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (2.6)$$

С учетом (2.5) можно получить формулу Муавра:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (2.7)$$

### 2.3. Метрические пространства

Множество  $X$  элементов  $x$  (точек) называется метрическим пространством, если любой паре точек  $x_1, x_2$  поставлено в соответствие неотрицательное вещественное число  $p(x_1, x_2)$ , которое называется расстоянием между указанными точками, при этом выполняются следующие условия:

1.  $p(x_1, x_2) > 0$ , если  $x_1 \neq x_2$ ;  $p(x_1, x_2) = 0$ , если  $x_1 = x_2$ .
2.  $p(x_1, x_2) = p(x_2, x_1)$  для любых  $x_1, x_2 \in X$ .
2.  $p(x_1, x_3) \leq p(x_1, x_2) + p(x_2, x_3)$  для любых  $x_1, x_2$  и  $x_3 \in X$  (правило треугольника).

#### Примеры:

1. Пусть  $R$  – множество всех действительных чисел. Если в качестве расстояния выбрать  $p(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ , то множество вещественных чисел превращается в метрическое пространство.

2. Рассмотрим  $R^n$  – множество, каждый элемент (вектор) которого представляет собой упорядоченную совокупность  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  из  $n$  вещественных чисел. Числа  $x_1, \dots, x_n$  называются координатами вектора  $x$ .

Если в качестве расстояния выбрать  $p(x, y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$ , то пространство  $R^n$  становится метрическим пространством.

Векторным пространством  $E^n$  называется множество элементов вида  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ , для которых введены операции сложения и умножения на вещественное число  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x_1, \dots, x_n\} + \{y_1, \dots, y_n\} = \{x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n\}; \quad (2.8)$$

$$\alpha \mathbf{x} = \alpha \{x_1, \dots, x_n\} = \{\alpha x_1, \dots, \alpha x_n\}.$$

Эти операции для любых векторов  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{z}$  и любых вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  обладают свойствами:

1.  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ ;
2.  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ ;
3.  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ , где  $\mathbf{0} = \{0_1, \dots, 0_n\}$ ;
4.  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ;
5.  $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ ;
6.  $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$ ;
7.  $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$ ;
8.  $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$ .

Число  $n$  называется размерностью векторного пространства  $E^n$ .

Векторы  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  называются линейно зависимыми, если существуют такие вещественные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , не все равные нулю, что

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

В противном случае векторы  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  называются линейно независимыми.

Совокупность  $n$  линейно независимых векторов называется базисом пространства  $E^n$ .

В векторном пространстве  $E^n$  введем скалярное произведение векторов  $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  и  $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$  как вещественное число, вычисляемое по правилу

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n. \quad (2.10)$$

Свойства скалярного произведения для любых векторов  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{z}$  и произвольного действительного числа  $\lambda$ :

1.  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ;

2.  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ ;
3.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ ;
4.  $(0, 0) = 0, \quad (x, x) > 0$  при  $x \neq 0$ .

Векторное пространство  $E^n$  с определенным в нем по формуле (2.10) скалярным произведением называется евклидовым векторным пространством  $E^n$ .

Для любых двух векторов  $x, y \in E^n$  имеет место неравенство Коши-Буняковского:

$$(x, y)^2 \leq (x, x) (y, y). \quad (2.11)$$

### 3. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

#### 3.1. Числовые последовательности

Числовой последовательностью  $\{a_n\}$  называется однозначное отображение множества натуральных чисел  $N$  во множество действительных чисел  $R$ . Это определение можно представить:  $\varphi(n) = a_n$ . Другими словами, числовая последовательность  $\{a_n\}$  – это пронумерованное множество действительных чисел:  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ . Число  $a$  называется пределом последовательности  $\{a_n\}$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое натуральное  $N$ , что для всех  $n \geq N$  выполняется неравенство  $|a_n - a| < \varepsilon$  (рис. 5).

Это определение записывают в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a. \quad (3.1)$$

Если последовательность сходится к пределу  $a$ , то она называется сходящейся, в противном случае последовательность называется расходящейся.

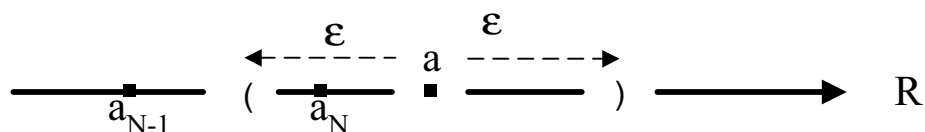


Рис.5.Графическое представление  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$

Примеры:

1. Последовательность  $\{1/n\} = 1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$  сходится к нулю.

2. Последовательность  $\{n\}$  является расходящейся.

3. Последовательность  $\{(n+1)/n\}$  сходится и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(n+1)/n\} = 1$ .

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+1}{3-2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1/n^3}{3/n^3-2} = -\frac{1}{2}$ , т.к.  $1/n^3$  и  $3/n^3 \rightarrow 0$ .

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3n}-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3}-1/\sqrt{n}} = 1/\sqrt{3}$ , т.к.  $1/\sqrt{n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Критерий сходимости Коши. Последовательность  $\{a_n\}$  сходится тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое натуральное  $N$ , что для всех  $n, m \geq N$  имеет место неравенство  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ .

### 3.2. Числовые ряды

Пусть  $\{x_n\}$  – числовая последовательность. Выражение вида

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad (3.2)$$

называется числовым рядом, а  $x_n$  – его n-ым членом.

Число  $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  называется n-ой частичной суммой ряда (3.2), а последовательность  $\{S_n\}$  – последовательностью частичных сумм ряда (3.2).

Числовой ряд (3.2) называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм  $\{S_n\}$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .

Предел  $S$  числовой последовательности частичных сумм  $\{S_n\}$  называется суммой ряда (3.2) и пишут

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S. \quad (3.3)$$

Если последовательность расходится, то ряд (3.2) называется расходящимся.

Необходимое условие сходимости числового ряда. Для сходимости числового ряда (3.2) необходимо, чтобы  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

Пример:

Рассмотрим гармонический ряд:  $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ . Очевидно, что  $x_n = 1/n \rightarrow 0$ . Тем не менее этот ряд является расходящимся.

Замечание 1. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  с  $n$ -ым членом  $x_n = 1/n^p$  сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ .

### 3.3. Признаки сходимости рядов со знакопостоянными членами

1-й признак сравнения. Рассмотрим ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ , где

$0 \leq x_k \leq y_k$ . Тогда, если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$  сходится, то сходится и ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ; если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  расходится, то расходится и ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ .

2-ой признак сравнения. Если для общих членов рядов  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  и

$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$  выполняется  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k/y_k = L < \infty$  (т.е.  $L$  – конечное число),

то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Примеры:

1. Проверить сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(2k^2)$ .

Сравним этот ряд с рядом  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ . Согласно замечанию 1 этот ряд сходится, т.к. для него  $p = 2$ .

Далее  $1/k^2 > 1/2k^2$ .

Следовательно, по 1-му признаку сравнения и рассматриваемый ряд **сходится**.

2. Проверить сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(3k+1)$ .

Сравним этот ряд с гармоническим рядом  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ , который расходится.

Далее  $\lim_{k \rightarrow \infty} (1/k)/(1/(3k+1)) = 3$ .

По 2-му признаку сравнения оба ряда **расходятся** одновременно.

Задачи. Проверить сходимость рядов:

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} 3/\sqrt{(2k+1)}$ ; 2.  $\sum_{k=1}^{\infty} k/(2k^2+6)$ ; 3.  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\sqrt{(k^3-2)}$ ; 4.  $\sum_{k=1}^{\infty} 2k/(k^3+k)$ ;

5.  $\sum_{k=1}^{\infty} (k^3-k)/(k-k^4+1)$ ; 6.  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k-2) \cdot (k^2+k)$ ; 7.  $\sum_{k=1}^{\infty} 2/\sqrt{(k^3+k-4)}$ ;

8.  $\sum_{k=1}^{\infty} (1-k)/\sqrt{(k^4-2)}$ ; 9.  $\sum_{k=1}^{\infty} 2k/(k^2-\sqrt{k})$ ; 10.  $\sum_{k=1}^{\infty} (3k+\sqrt{k})/(1-2k)$ .

### 3.4. Признаки сходимости Даламбера, Коши и Лейбница

Числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ .

Числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$  из модулей его членов – расходится.

Признак Даламбера. Рассмотрим ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ . Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1}/x_n| = L$ , то при  $L < 1$  – ряд сходится абсолютно, а при  $L > 1$  – расходится.

Признак Коши. Рассмотрим ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ . Если  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|x_k|} = L$ , то при  $L < 1$  – ряд сходится абсолютно, а при  $L > 1$  – расходится.

Примеры:

Проверить сходимость ряда:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ . По признаку Даламбера:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/2^{n+1}}{1/2^n} = 1/2 < 1$ , ряд сходится.

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$ . По признаку Коши:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} < 1$ , ряд сходится.

Признак сходимости знакочередующего ряда (признак Лейбница).

Для сходимости знакочередующего ряда  $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n - \dots$  необходимо, чтобы:



1.  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

2.  $a_k \geq a_{k+1} \geq 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Пример:

Ряд  $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots + (-1)^n/n + \dots -$  сходится, т.к. выполнены оба условия признака Лейбница.

### ЗАДАНИЕ

Проверить сходимость рядов: 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} (n/3^n)$ ;

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} [3n^2/(5n+8n^2)]^n$ .

## 4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n. \quad (14.1)$$

называется степенным рядом. Здесь  $a_0, \dots, a_n, \dots$  – последовательность вещественных чисел.

Формула Коши-Адамара

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (14.2)$$

определяет радиус сходимости степенного ряда.

Можно доказать теорему, что степенной ряд (14.1) абсолютно сходится на интервале  $(x_0 - R, x_0 + R)$  и расходится вне этого интервала (рис. 6). Интервал  $(x_0 - R, x_0 + R)$  называется интервалом сходимости степенного ряда (14.2).

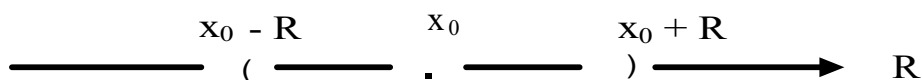


Рис. 6. Интервал сходимости

Радиус сходимости можно рассчитать и по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Пример:

Исследовать сходимость степенного ряда:

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

Решение.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1.$$

Таким образом, ряд сходится для значений  $x$ :  $-1 < x < 1$  и расходится вне этого интервала.

При  $x = 1$  получаем гармонический ряд:  $1 + 1/2 + \dots + 1/n + \dots$ , который расходится.

При  $x = -1$  получаем знакопеременный ряд:  $-1 + 1/2 - 1/3 + 1/4 \dots$ , который сходится. Итак, область сходимости степенного ряда множество  $-1 \leq x < 1$ .

### ЗАДАНИЕ

Исследовать сходимость степенных рядов:

1.  $\sum_{n=0}^{\infty} (x^n / 3^n)$ .

2.  $\sum_{n=0}^{\infty} (x^n / n^2)$ .

3.  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n (1 + 2/n)^n$ .

## 5. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

### 5.1. Числовая функция

Числовая функция вещественного переменного  $x$  – это закон или правило, по которому каждому числу  $x$  некоторого числового подмножества  $A$  множества вещественных чисел  $R$  ставится в соответствие определенное число  $y$  числового подмножества  $B \subset R$ .

Числовые функции вещественного переменного обычно задаются с помощью формул вида  $y = f(x)$ .

Графиком функции  $y = f(x)$  называется множество точек плоскости  $\{x, f(x)\}$ , ордината  $y$  и абсцисса  $x$  которых связаны соотношением  $y = f(x)$  (рис. 7).

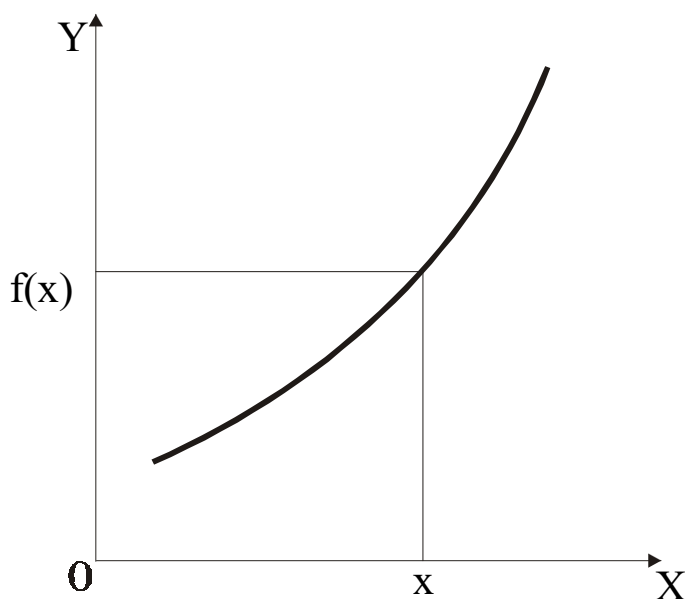


Рис.7. Графическое представление функции  $y = f(x)$

Функция  $y = f(x)$  называется монотонно возрастающей на некотором промежутке, если для любых  $x_1$  и  $x_2$  из этого промежутка, причем  $x_1 < x_2$ , следует:  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Функция  $y = f(x)$  называется монотонно убывающей на некотором промежутке, если для  $x_1$  и  $x_2$  из этого промежутка, где  $x_1 < x_2$ , следует:  $f(x_1) > f(x_2)$ .

## 5.2. Предел и непрерывность функции

Число  $A$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $0 < |x - a| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Если эти требования выполнены, то пишут:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

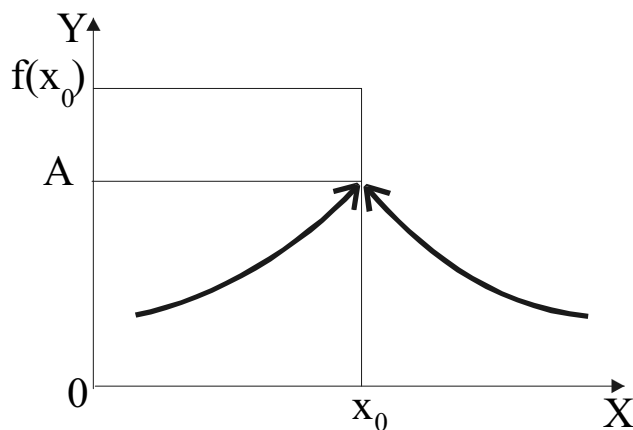
Функция  $\alpha(x)$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow a$ ,

если  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ .

Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если выполняется:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Функция называется непрерывной на множестве  $X$ , если она непрерывна в каждой точке  $x$  этого множества  $X$ .

В противном случае функция  $y = f(x)$  имеет разрыв в точке  $x_0$  (рис. 8).



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \text{ но } f(x_0) \neq A$$

Рис.8. Разрыв функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$

Точка, в которой функция  $f(x)$  не является непрерывной, называется точкой разрыва функции  $f(x)$  (это точки  $x_0, x_1, x_2$  на рис.9).

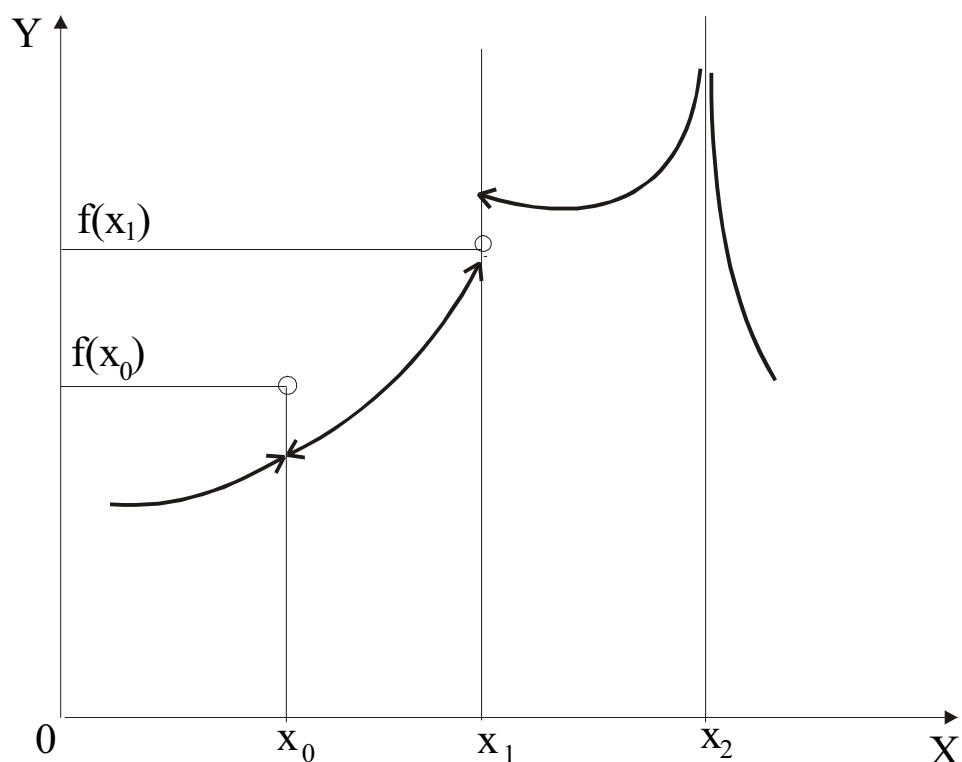


Рис.9. Разрывы функции  $y = f(x)$ : в точке  $x_0$  – устранимый разрыв; в точке  $x_1$  – разрыв 1-го рода; в точке  $x_2$  – разрыв 2-го рода

Вычисление некоторых пределов:

1-й замечательный предел:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

2-й замечательный предел:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e$

Примеры:

Вычислить пределы функций:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 5x^2}{4x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3/x - 5}{4 + 3/x^2} = -\frac{5}{4};$

2).  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6;$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{x^2} = 9 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{(3x)^2} = 9;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 2/x)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 2/x)^{-x/2 \cdot (-6)} = e^{-6}.$$

## ЗАДАНИЕ

Вычислить пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4x^3}{3x^3 + 7};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2x^2}{4x + 3x^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg}(2x)}{\sin^2(3x)};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^{-2x}.$$

## 6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

### 6.1. Понятие производной

Пусть  $y = f(x)$  определена на некотором множестве  $X$  и  $x_0 \in X$ .

Если существует предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , то этот предел называется производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  и обозначается  $f'(x_0)$  или  $y'(x_0)$ .

Операция вычисления производной функции называется дифференцированием.

Функция  $y = f(x)$ , имеющая производную в точке  $x_0$ , называется дифференцируемой в точке  $x_0$ .

Функция, дифференцируемая в каждой точке  $x$  множества  $X$ , называется дифференцируемой на множестве  $X$ .

Замечания:

1. Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то она и непрерывна в этой точке.

1. Функция  $y = f(x)$ , непрерывная в точке  $x_0$ , не обязательно дифференцируема в этой точке.

Механический смысл производной. Пусть точка движется вдоль пути  $S$ . Тогда  $S = f(t)$  – путь, пройденный точкой за время  $t$ .

Тогда  $\Delta S = f(t + \Delta t) - f(t)$  – путь, пройденный точкой за отрезок времени  $(t, t + \Delta t)$ .

Отношение  $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$  – средняя скорость точки на отрезке  $(t, t + \Delta t)$ .

Тогда  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t) = V(t)$  – мгновенная скорость точки в момент времени  $t$ .

Геометрический смысл производной. Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Проведем касательную к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  (рис. 10). Можно показать, что тангенс угла наклона касательной к графику функции в точке  $x_0$  равен производной функции в этой точке, т.е.

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0).$$

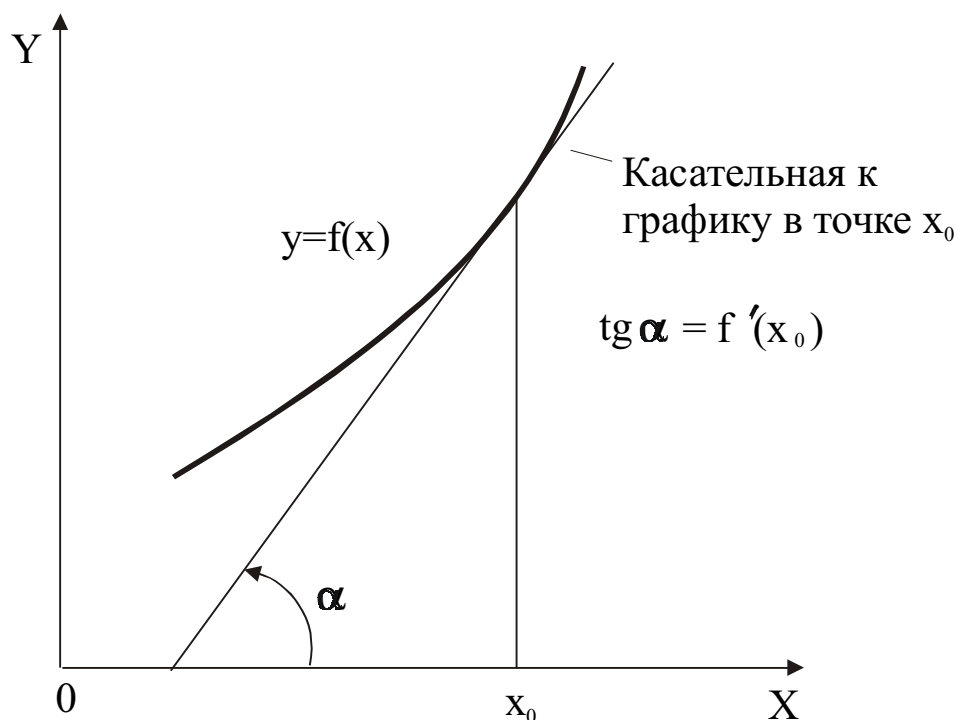


Рис.10. Геометрический смысл производной

Правила дифференцирования:

1.  $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$ , где  $C$  – вещественное число;
2.  $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ ;
3.  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ ;
4.  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ .

Дифференцирование сложной функции. Пусть  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , а функция  $g(t)$  дифференцируема в точке  $t_0 = f(x_0)$ . Тогда сложная функция  $y = g(f(x))$  дифференцируема в точке  $x_0$  и

$$y'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad (6.3)$$

Дифференциал функции. Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ , которая дифференцируема в точке  $x$ . Придадим  $x$  приращение  $\Delta x$  и рассмотрим соответствующее приращение функции

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \Delta x + o(\Delta x),$$

где  $o(\Delta x)$  – бесконечно малая часть приращения функции при  $\Delta x \rightarrow 0$ , а линейная часть приращения функции  $f'(x)\Delta x$  называется дифференциалом функции  $f(x)$  в точке  $x$ :  $df = f'(x)\Delta x$ .

Производные от элементарных функций:

1.  $(x^n)' = nx^{n-1}$ ;
2.  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ;
3.  $(\ln x)' = 1/x$ ;
4.  $(\sin x)' = \cos x$ ;
5.  $(\cos x)' = -\sin x$ ;
6.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ;
7.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ;
8.  $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;
9.  $(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ .



Примеры:

$$1. (2^{\cos x} + x^3)' = 2^{\cos x} \cdot \ln 2 \cdot (-\sin x) + 3x^2;$$

$$2. (\ln x \cdot \sin x)' = \frac{1}{x} \cdot \sin x + \ln x \cdot \cos x;$$

$$3. \left( \frac{\operatorname{tg} x}{x^2} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x^2 - \operatorname{tg} x \cdot 2x \cdot \frac{1}{x^4}.$$

Задачи. Продифференцировать функции:

$$1. (\cos(\ln x))';$$

$$2. (3^{\sin x} + \sqrt{x})';$$

$$3. (\ln(4x + x^2))';$$

$$4. (2^x \cdot \ln^2 x)';$$

$$5. (\arcsin x^2)';$$

$$6. \left( \frac{2^x}{x} \right)';$$

$$7. (\operatorname{arctg} 4^x)';$$

$$8. (x^4 \cdot \operatorname{tg} x)';$$

## 6.2. Исследование функций.

Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале (а, б). Если для любого  $x$  из этого интервала  $f'(x) > 0$ , то функция  $f(x)$  возрастает на этом интервале (рис. 11).

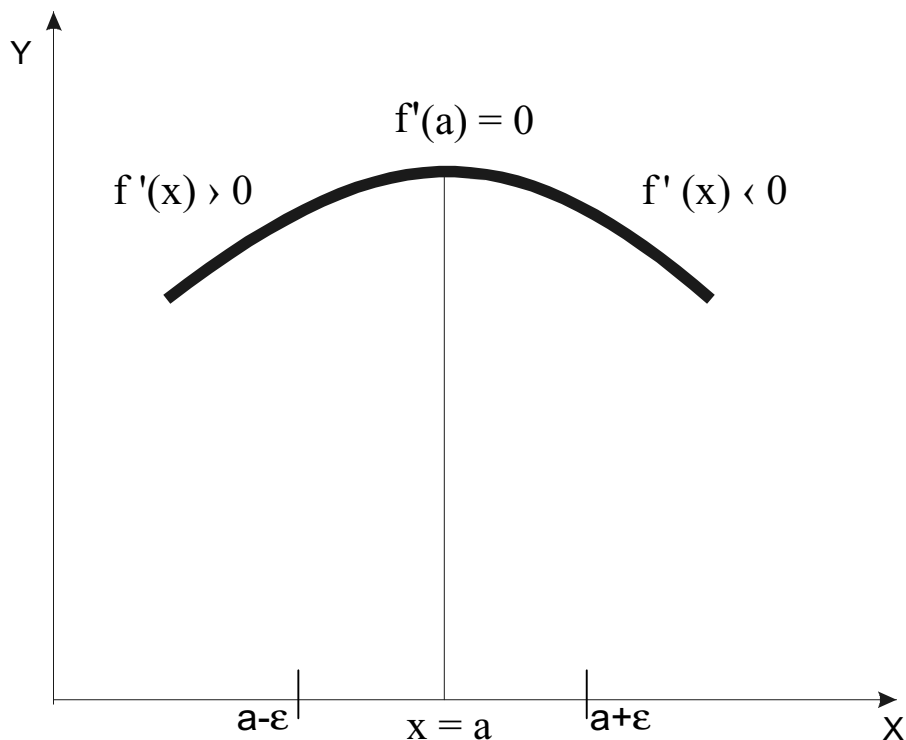
Если же для любого  $x$  из этого интервала  $f'(x) < 0$ , то функция  $f(x)$  убывает на этом интервале.

Функция  $f(x)$  имеет в точке  $x = a$  локальный максимум, (рис.11), если для любого  $x$  из малой окрестности этой точки выполняется

$$f(a) > f(x).$$

Функция  $f(x)$  имеет в точке  $x = a$  локальный минимум, если для любого  $x$  из малой окрестности этой точки выполняется

$$f(a) < f(x).$$



*Рис.11. Возрастание и убывание функции  $f(x)$*

Теорема Ферма (Необходимое условие существования экстремума).

Если функция  $f(x)$  имеет в точке  $x = a$  локальный максимум или минимум (локальный экстремум) и дифференцируема в этой точке, то выполняется  $f'(a) = 0$  (см. рис. 11).

Теорема (Достаточное условие существования экстремума).

Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ , за исключением, быть может, точки  $a$ .

Тогда, если  $f'(x) < 0$  при  $a-\epsilon < x < a$  и  $f'(x) > 0$  при  $a < x < a+\epsilon$ , то в точке  $a$  – локальный минимум.

Если же  $f'(x) > 0$  при  $a-\epsilon < x < a$  и  $f'(x) < 0$  при  $a < x < a+\epsilon$ , то в точке  $a$  – локальный максимум (см. рис. 11).

Пример 1:

Определить интервалы возрастания и убывания функции  $y = 4x - 3 - x^2$ .

Установить точку локального экстремума.

Решение

Производная функции:  $y' = 4 - 2x = 2(2 - x)$ .

$y' > 0$  при  $x < 2$ , т.е. при  $x < 2$  функция возрастает.

$y' < 0$  при  $x > 2$ , т.е. при  $x > 2$  функция убывает.

При  $x = 2$   $y' = 0$ , т.е.  $x = 2$  является точкой максимума функции.

В точке  $x = 2$   $y(2) = 1$ .

Пример 2:

Определить интервалы возрастания и убывания функции  $y = xe^{-x}$ .

Найти точку экстремума этой функции.

Решение.

Производная функции:  $y' = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x)$ .

При  $x < 1$   $y' > 0$  – функция возрастает, при  $x > 1$   $y' < 0$  – убывает.

При  $x = 1$   $y' = 0$  – функция имеет максимум:  $y(1) = e^{-1}$ .

## ЗАДАНИЕ

Исследовать и построить графики функций  $y = x^2 + 2x - 3$ ,

$$y = x \cdot e^{-2x},$$

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

## 7. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

### 7.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Функция  $F(x)$ , определенная на числовом множестве  $X$ , называется первообразной для функции  $f(x)$ , если для любого  $x \in X$  выполняется

$$F'(x) = f(x). \quad (7.1)$$

Очевидно, что если  $F(x)$  – первообразная для  $f(x)$ , то  $F(x) + C$  ( где  $C$  – любое действительное число) также первообразная для  $f(x)$ .

Совокупность всех первообразных для функции  $f(x)$  называется неопределенным интегралом от функции  $f(x)$  и обозначается

$$F(x) + C = \int f(x) dx. \quad (7.2)$$

Свойства неопределенного интеграла:

1.  $\int F'(x) dx = F(x) + C$ ;
2.  $(\int f(x) dx)' = f(x)$ ;
3.  $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$ ;
4.  $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ .

Таблица неопределенных интегралов

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$    | 2. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$                |
| 4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$                             | 4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$                       |
| 5. $\int \cos x dx = \sin x + C$                                | 6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ |
| 7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$       |   |
| 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$ | 9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$ |

## 7.2. Определенный интеграл

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ , определенную на отрезке  $[a, b]$ . Осуществим разбиение отрезка  $[a, b]$  точками  $a = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n = b$  на  $n$  отрезков  $[a_k, b_k]$ . Обозначим это разбиение буквой  $T$ . Выберем внутри каждого отрезка

$[a_k, b_k]$  произвольную точку  $x_k$ , значение функции в этих точках будет равно  $f(x_k)$  (рис.12).

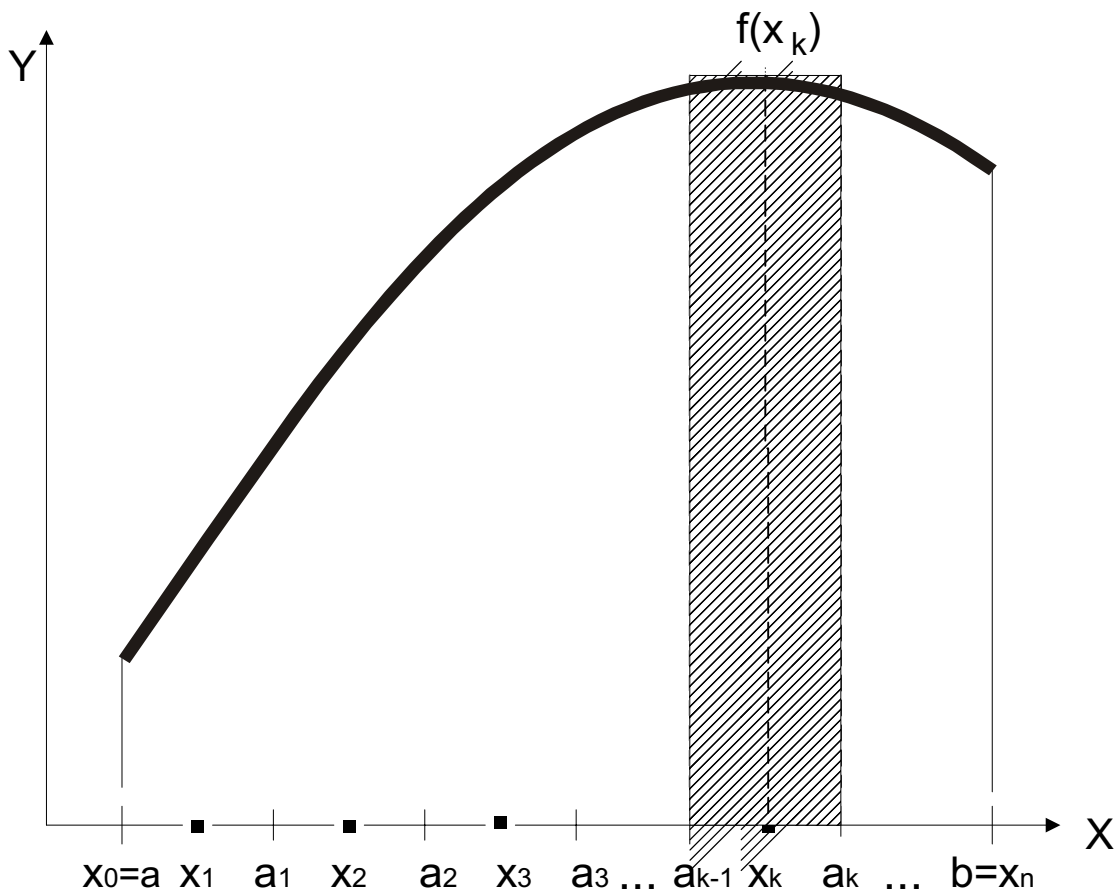


Рис. 12. Построение интегральной суммы

Построим интегральную сумму:  $\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = S(T)$ .

Если существует предел этой интегральной суммы при стремлении максимальной длины отрезка разбиения к нулю, т.е. при  $\max \Delta x_k \rightarrow 0$ , то этот предел называется определенным интегралом от функции  $f(x)$  и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx = \lim S(T) \text{ при } \max \Delta x_k \rightarrow 0. \quad (7.3)$$

Свойства определенного интеграла:

1. Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a,b]$ , тогда она интегрируема на любом отрезке  $[c,d] \subset [a,b]$ .
2. Пусть  $a < c < b$ . Тогда, если  $f(x)$  интегрируема на  $[a,b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

3. Пусть  $f(x)$  интегрируема на  $[a,b]$ , а  $C$  – постоянная, тогда функция  $C \cdot f(x)$  также интегрируема на этом отрезке и

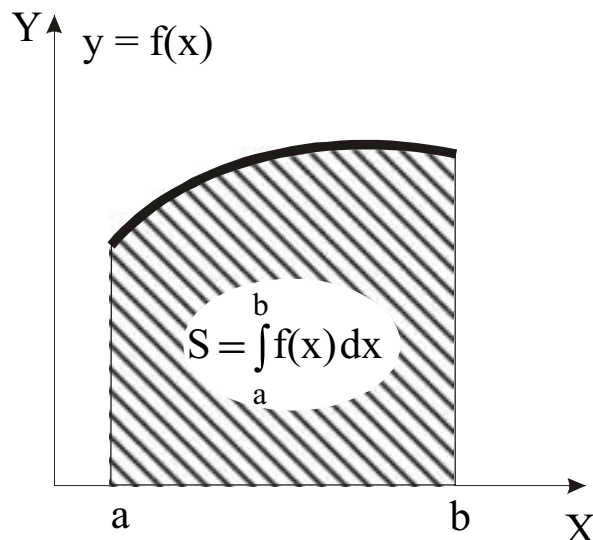
$$\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx .$$

4. Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на отрезке  $[a,b]$ , тогда их сумма  $f(x) \pm g(x)$  также интегрируема на  $[a,b]$  и

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx .$$

5. Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на отрезке  $[a,b]$ , тогда их произведение  $f(x) \cdot g(x)$  также интегрируемо на этом отрезке.

Геометрический смысл определенного интеграла. Определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой  $y = f(x)$ , снизу отрезком  $[a,b]$ , а также двумя отрезками  $x = a$  и  $x = b$  (рис. 13).



*Рис. 13. Геометрический смысл определенного интеграла*

Формула Ньютона-Лейбница. Формула устанавливает связь между первообразной  $F(x)$  для функции  $f(x)$  и определенным интегралом от этой функции:

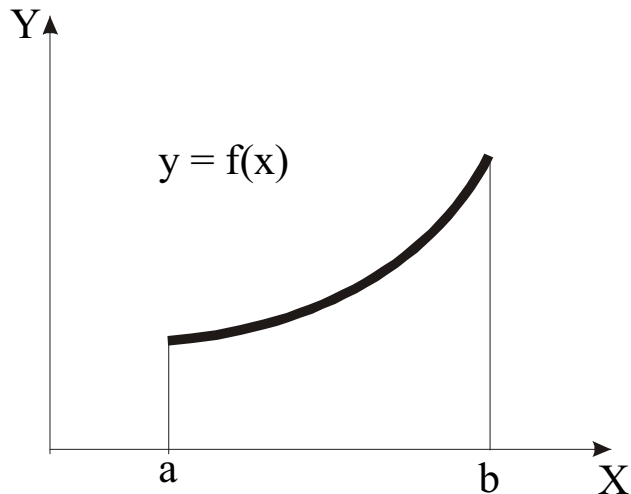
$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx .$$

Замечание. Определенный интеграл существует:

- для непрерывных функций;
- для монотонных функций;
- для функций, ограниченных на отрезке и имеющих не более чем конечное число точек разрыва на рассматриваемом отрезке.

Вычисление длины кривой и объема тел вращения. Рассмотрим кривую  $y = f(x)$ , определенную на отрезке  $[a, b]$  и имеющую на этом отрезке непрерывную производную. Тогда длину кривой  $y = f(x)$  вычисляем по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



*Рис. 14. Длина дуги и объем тела вращения*

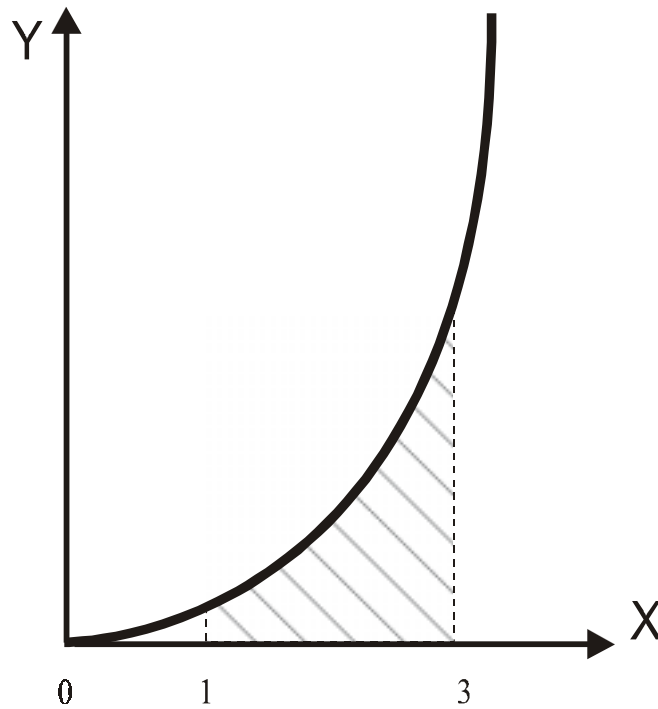
Объем тела, полученного при вращении этой кривой вокруг оси  $Ox$ , равен

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx .$$

Пример:

Найти площадь  $S$  криволинейной трапеции, ограниченной параболой  $y = x^3$ , отрезком  $1 < x < 3$  и прямыми  $x = 1$  и  $x = 3$  (рис. 15).

$$S = \int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1}{4} = 20 \text{ (кв. ед.)}.$$



*Рис. 15. Площадь криволинейной трапеции*

Найти объем тела  $V$ , образованного при вращении этой кривой вокруг оси  $OX$ .

$$V = \pi \int_1^3 x^6 dx = \pi \cdot \frac{x^7}{7} \Big|_1^3 = \frac{\pi \cdot (3^7 - 1)}{7} \text{ (куб. ед.)}.$$

### ЗАДАНИЕ

Вычислить площадь плоской фигуры и объем тела вращения, ограниченных:

1. Кривой  $y = \sqrt{x}$ , отрезками  $[4, 8]$  и прямыми  $x = 4$ ,  $x = 8$ .
2. Кривыми  $y = x^2$  и  $y = x^3$ .
5. Кривой  $y = 1/x$ , отрезками  $[1, 3]$  и прямыми  $x = 1$  и  $x = 3$ .



## РАЗДЕЛ 2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

### 8. ВЕКТОРЫ. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Вектором называется направленный отрезок  $\mathbf{AB}$  с начальной точкой  $A$  и конечной точкой  $B$ . Иногда вектор обозначают одной буквой  $\mathbf{a}$ . Длиной  $|\mathbf{AB}|$  вектора  $\mathbf{AB}$  называется число, равное длине отрезка  $AB$ . Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются коллинеарными (рис. 16).

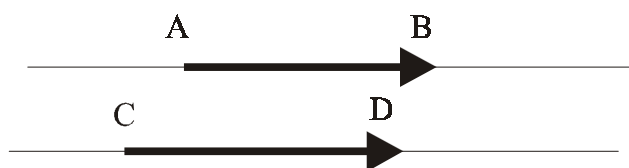


Рис.16. Коллинеарные векторы  $\mathbf{AB}$  и  $\mathbf{CD}$

#### Операции над векторами:

- Если вектор  $\mathbf{AB}$  умножить на действительное число  $C$ , то получим новый вектор  $\mathbf{DE}$ , который коллинеарен вектору  $\mathbf{AB}$ , длина его в  $C$  раз больше, и при  $C > 0$  вектор  $\mathbf{DE}$  направлен в ту же сторону, а при  $C < 0$  в противоположную вектору  $\mathbf{AB}$ .
- Если сложить векторы  $\mathbf{AB}$  и  $\mathbf{DE}$ , то получим вектор  $\mathbf{KL}$ , который станет третьей стороной  $AE$  в треугольнике  $AB(D)E$ .

Скалярным произведением двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется число

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi, \quad (8.1)$$

где  $\varphi$  – угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (рис. 17).

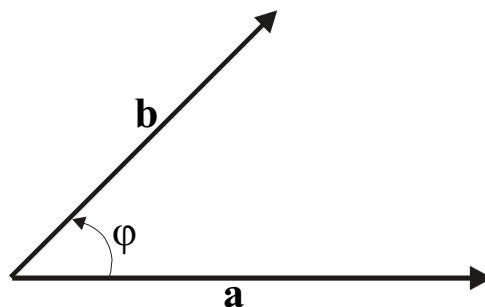


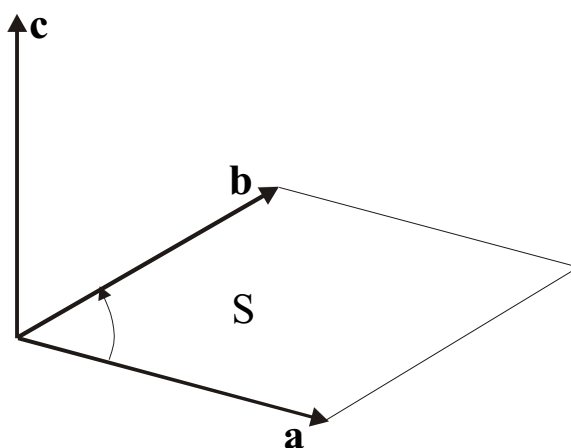
Рис. 17. Скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$

**Векторным произведением векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$**  называется вектор  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{c} = [\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}] \quad (8.2)$$

такой, что (рис. 18):

1. Длина вектора  $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .
2. Вектор  $\mathbf{c}$  перпендикулярен  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .
3. Векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  образуют правую тройку векторов, т. е.



*Рис.18. Векторное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :  $\mathbf{c} = [\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}]$*

Длина вектора  $\mathbf{c}$  численно равна площади параллелограмма  $S$ .

## 9. ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ. БАЗИС. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Элементами (векторами)  $n$ -мерного пространства  $\mathbb{R}^n$  являются совокупности из  $n$  действительных чисел  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Система векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  называется линейно зависимой, если существуют действительные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , одновременно не равные нулю, для которых выполняется соотношение

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = 0. \quad (9.1)$$

Если для векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  нельзя указать числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , чтобы выполнялось условие (9.1), то эти векторы называются линейно независимыми.

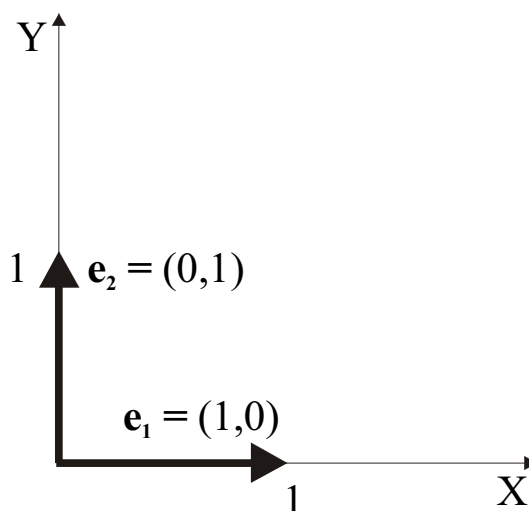
Базисом в пространстве  $R^n$  называется любая система  $n$  линейно независимых векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ .

Следует отметить, что любой вектор  $\mathbf{b}$  из  $R^n$  можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{a}_1 + b_2\mathbf{a}_2 + \dots + b_n\mathbf{a}_n. \quad (8.3)$$

Здесь  $b_1, b_2, \dots, b_n$  – **координаты  $\mathbf{b}$  по отношению к базису  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$** .

В двумерном пространстве  $R^2$  базис образуют любые два неколлинеарные вектора (обычно два взаимно перпендикулярные вектора, направленные вдоль осей  $O_x$  и  $O_y$ )(рис.19).



*Рис.19. Прямоугольная система координат в  $R^2$*

Прямоугольная система координат  $x, y, z$  в  $R^3$  представляет собой три взаимно перпендикулярные прямые (оси координат), проходящие через начало координат – точку  $0$  (рис. 20).

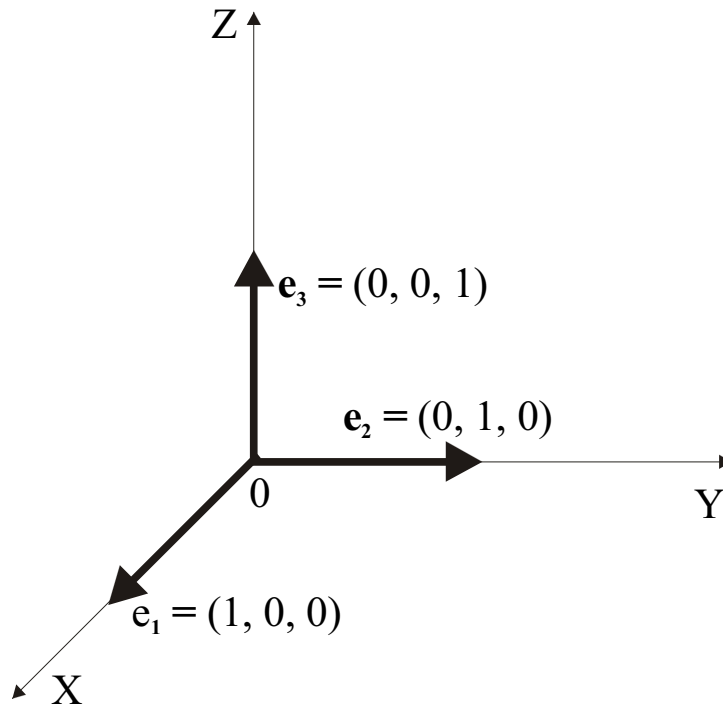


Рис 20. Прямоугольная система координат

Базис называется **ортонормированным**, если все его векторы попарно ортогональны (перпендикулярны) и по длине равны 1. Декартова система координат с ортонормированным базисом называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Пусть векторы **a** и **b** в ортонормированном базисе **e<sub>1</sub>**, **e<sub>2</sub>**, **e<sub>3</sub>** можно разложить следующим образом:

$$\mathbf{a} = a_x \cdot \mathbf{e}_1 + a_y \cdot \mathbf{e}_2 + a_z \cdot \mathbf{e}_3;$$

$$\mathbf{b} = b_x \cdot \mathbf{e}_1 + b_y \cdot \mathbf{e}_2 + b_z \cdot \mathbf{e}_3.$$

Тогда скалярное произведение векторов **a** и **b** можно вычислить по формуле

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z. \quad (9.2)$$

Векторное произведение векторов **a** и **b** определяется по формуле

$$[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) - \mathbf{j} \cdot (a_x \cdot b_z - b_x \cdot a_z) + \mathbf{k} \cdot (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x)$$

Пример:

Вычислить скалярное и векторное произведение векторов  $\mathbf{a}(1, 2, 3)$  и  $\mathbf{b}(4, 5, 6)$ .

Решение

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32.$$

$$[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}] = \mathbf{i}(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) - \mathbf{j}(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + \mathbf{k}(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

### ЗАДАНИЕ

1. Вычислить скалярное и векторное произведения векторов  $\mathbf{a}(1, 3, 5)$  и  $\mathbf{b}(2, 4, 6)$ .

2. Вычислить скалярное и векторное произведения векторов  $\mathbf{c}(-1, 2, 4)$  и  $\mathbf{d}(-2, 3, 5)$ .

## 10. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Таблица чисел  $a_{ij}$  вида

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = (a_{ij}), \quad (10.1)$$

состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов называется матрицей размером  $m \times n$ .

Числа  $a_{ij}$  называются ее элементами. При  $m = n$  она называется квадратной матрицей  $n$ -го порядка.

Если представить, что строки матрицы являются  $n$ -мерными векторами  $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ , то максимальное число линейно независимых векторов называется рангом матрицы  $A$ .

### Операции над матрицами

1. При умножении матрицы  $A = (a_{ij})$  на число  $\lambda$  получаем матрицу  $B = (b_{ij})$ , т.е.  $\lambda A = B$ , элементы которой равны  $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ .



в) если совместная система имеет бесконечное множество решений, то она называется неопределенной;

г) если совместная система имеет единственное решение, то она называется определенной.

Пусть векторы  $\mathbf{a}_j$  – столбцы матрицы  $A$ , т.е. эту матрицу можно представить в виде:  $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ . Введем определители:  $|A| = |a_1, a_2, \dots, a_n|$  и  $|A_k| = |a_1, a_2, \dots, b_k, a_n|$ , т.е. столбец  $\mathbf{a}_k$  заменяется на столбец свободных членов  $\mathbf{b}_k$ .

Правило Крамера. Если определитель системы (11.1) отличен от нуля, т.е.  $|A| \neq 0$ , то система уравнений имеет единственное решение, вычисляемое по формуле

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (11.2)$$

## **РАЗДЕЛ 3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

Математическое программирование – раздел математики, изучающий экстремальные задачи и методы их решения.

В общем виде постановка экстремальной задачи состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при условиях  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), где  $f$  и  $g_i$  – известные функции, а  $b_i$  – некоторые действительные числа.

### **12. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.**

#### **ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ**

Рассмотрим множество всевозможных упорядоченных совокупностей  $n$  чисел вида  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которое называется  $n$ -мерным координатным пространством  $R^n$ . Каждая упорядо-

ченная совокупность  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется точкой  $M$  этого пространства.

Между двумя точками этого пространства  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $B(y_1, y_2, \dots, y_n)$  можно определить расстояние  $r(A, B)$ :

$$r(A, B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} . \quad (12.1)$$

Координатное пространство  $R^n$  с введенным расстоянием  $r(A, B)$  называется  $n$ -мерным евклидовым пространством  $E^n$ .

Рассмотрим множество  $E_1^n \in E^n$ . Если каждой точке  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  этого подмножества  $E_1^n$  можно поставить некоторое действительное число  $u$ , то говорят, что на множестве  $E_1^n$  определена функция  $n$  переменных  $u = f(M)$  или  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Пусть  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – точка множества  $E_1^n$ , где определена функция  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Рассмотрим частное приращение этой функции в точке  $M$ , соответствующее приращению  $\Delta x_k$  аргумента  $x_k$ :

$$\Delta_k u = f(x_1, \dots, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n).$$

Частной производной функции  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  по аргументу  $x_k$  в точке  $M$  называется

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_k u}{\Delta x_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k} (M).$$

Рассмотрим полное приращение функции  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  в точке  $M$ , принадлежащей области  $E_1^n$ :

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n).$$

Функция  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  называется дифференцируемой в точке  $M(x_1, \dots, x_n)$ , если ее полное приращение  $\Delta u$  можно представить в виде

$$\Delta u = \sum_{k=1}^n (A_k \cdot \Delta x_k + a_k \cdot \Delta x_k),$$

где  $A_k$  – некоторые числа;  $a_k$  – бесконечно малые при  $\Delta x_k \rightarrow 0$



для всех  $k$  от 1 до  $n$ .

Дифференциалом функции  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  в точке  $M$  называется линейная функция вида

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M) \cdot \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(M) \cdot \Delta x_n.$$

### Теоремы

1. Необходимое условие дифференцируемости. Если функция  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  дифференцируема в точке  $M$ , то она имеет в этой точке частные производные по каждому аргументу  $x_1, \dots, x_n$ .

2. Достаточное условие дифференцируемости. Если функция  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  имеет частные производные по каждому аргументу  $x_1, \dots, x_n$  в окрестности точки  $M$  и эти частные производные непрерывны в точке  $M$ , то функция  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  дифференцируема в точке  $M$ .

Геометрический смысл дифференцируемости функции. Если функция  $u = f(x, y)$  дифференцируема в точке  $M(x_0, y_0)$ , то в точке  $(x, y, f(x_0, y_0))$  существует касательная плоскость к поверхности  $S$  (графику этой функции), причем уравнение этой касательной плоскости имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cdot (y - y_0) = u - f(x_0, y_0).$$

### Пример:

Найти частные производные и дифференциал функции

$$u = y \cdot x^2 + y + x^3$$

в точке  $M(1, 2)$ .

### Решение

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2) = 2yx + 3x^2 \Big|_{(1,2)} = 4 + 3 = 7;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,2) = x^2 + 1 \Big|_{(1,2)} = 1 + 1 = 2.$$

Дифференциал в точке  $M(1,2)$  равен:

$$du(1, 2) = 7 \cdot dx + 2 \cdot dy.$$

### ЗАДАНИЕ

Найти частные производные и дифференциал  $du$  в точке  $M(2, 1)$ :

1.  $u = x^2 \cdot y^3 + x^3$ ;
2.  $u = y^3/x + y^2 + xy^2$ ;
3.  $u = \sin(x^2 + y^3)$ ;
4.  $u = x/(x+y^2)$ ;
5.  $u = x^y$ .

## 13. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Функция  $u = f(M)$  имеет в точке  $M_0$  локальный максимум, если существует такая окрестность точки  $M_0$ , в которой выполняется неравенство

$$f(M) < f(M_0) \text{ для всех } M \neq M_0. \quad (13.1)$$

Функция  $u = f(M)$  имеет в точке  $M_0$  локальный минимум, если существует такая окрестность точки  $M_0$ , в которой выполняется неравенство

$$f(M) > f(M_0) \text{ для всех } M \neq M_0. \quad (13.2)$$

Если функция  $u = f(M)$  имеет в точке  $M_0$  локальный максимум или локальный минимум, то говорят, что эта функция имеет в точке  $M_0$  локальный экстремум.

### ТЕОРЕМА (Необходимое условие экстремума)

Если функция  $u = f(M)$  имеет в точке  $M_0$  локальный экстремум и в этой точке существует частная производная функции по какому-либо аргументу  $X_k$ , то  $\partial u / \partial x_k (M_0) = 0$ .

Следствие. Если функция  $u = f(M)$  имеет в точке  $M_0$  локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то дифференциал функции в точке  $M_0$  равен нулю, т.е.

$$du(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0) dx_n = 0.$$

Рассмотрим достаточное условие экстремума функции на примере функции двух переменных.

Пусть функция  $u = f(x, y)$  дифференцируема в окрестности точки  $M_0(x_0, y_0)$  и дважды дифференцируема в самой точке  $M_0$ . Пусть  $M_0$  – точка возможного экстремума данной функции, т.е. дифференциал функции в этой точке равен нулю:  $du(M_0) = 0$ .

Введем обозначения:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0);$$

$$a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0);$$

$$a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0).$$

Обозначим:  $D = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$ .

Тогда справедлива ТЕОРЕМА (Достаточное условие экстремума):

1. Если  $D > 0$ , то в точке  $M_0$  функция  $u = f(x, y)$  имеет локальный экстремум:

- максимум при  $a_{11} < 0$ ,
- минимум при  $a_{11} > 0$

2. Если  $D < 0$ , то в точке  $M_0$  функция  $u = f(x, y)$  не имеет экстремума.

3. Если же  $D = 0$ , то в точке  $M_0$  функция  $u = f(x, y)$  может иметь локальный экстремум, а может и не иметь его. Требуется дополнительные исследования функции в этой точке.

Пример:

Найти точки локального экстремума функции  $u = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y$ .

## Решение

Вычисляем частные производные функции и приравняем их нулю:

$$u'_x = 2x - 2y = 0, \quad u'_y = -2x + 2 = 0.$$

Решая эту систему, получаем точку возможного экстремума:  $M(1,1)$ .

Далее находим частные производные второго порядка:  
 $u''_{xx} = 2, u''_{xy} = -2, u''_{yy} = 0$ .

$$\text{Тогда } D = u''_{xx} \cdot u''_{yy} - (u''_{xy})^2 = -4 < 0.$$

Следовательно, в точке  $M$  функция  $u = f(x, y)$  не имеет локального экстремума.

## ЗАДАНИЕ

Найти точки локального экстремума функций:

1.  $u = x_2 - 2 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^3$ ;
2.  $u = x^2 - x \cdot y + y^2$ ;
3.  $u = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot x$ ;
4.  $u = x^2 - x \cdot y - y^2$ .

## 14. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ. МЕТОД ЛАГРАНЖА

Рассмотрим функцию  $u = f(x, y)$ , определенную и непрерывно дифференцируемую на множестве  $E^2_1 \subset E^2$ .

Обозначим  $X$  – множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям

$$g_i(x, y) = 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (14.1)$$

Уравнения (14.1) называются уравнениями связи.

Точка  $M_0 \in X$  называется точкой условного максимума функции  $u = f(x, y)$ , если существует такая окрестность этой точки, что для любой точки  $M$  из этой окрестности выполняется

$$f(M) < f(M_0), \quad M \neq M_0. \quad (14.2)$$

Точка  $M_0 \in X$  называется точкой условного минимума функции  $u = f(x, y)$ , если существует такая окрестность этой точки, что для любой точки  $M$  из этой окрестности выполняется

$$f(M) > f(M_0), M \neq M_0 \quad (14.3)$$

Задача об условном экстремуме функции  $u = f(x, y)$  при условиях связи (14.1) эквивалентна задаче о локальном экстремуме функции Лагранжа:

$$L(x, y, \ddot{\mathbf{e}}) = f(x, y) + \sum_{i=1}^m \ddot{e}_i \cdot g_i(x, y). \quad (14.4)$$

Метод Лагранжа состоит из следующих этапов:

1. Составляется функция Лагранжа  $(2 + m)$  переменных:

$$L(x, y, \ddot{\mathbf{e}}) = f(x, y) + \sum_{i=1}^m \ddot{e}_i \cdot g_i(x, y). \quad (14.5)$$

2. Вычисляются и приравняются нулю ее частные производные по  $x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{i=1}^m \ddot{e}_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x} = 0; \quad (14.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{i=1}^m \ddot{e}_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \ddot{e}_i} = g_i(x, y) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

3. Решается система  $(2 + m)$  уравнений (14.6) относительно неизвестных  $x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ .

Полученная система уравнений – необходимые условия первого порядка в задаче на относительный экстремум, а ее решения  $x_0, y_0$  называются условно-стационарными точками.

Как и в случае задач на безусловный экстремум, необходимые условия первого порядка не определяют характера условно-стационарных точек. Для выяснения этого вопроса следует привлечь производные функций  $f(M), g_i(M)$  более высоких порядков.

Пример:

Найти точки условного экстремума функции  $z = x^2 + y^2$ , если  $x + y = 1$ .

### Решение

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda \cdot (x + y - 1);$$

$$F'_x = 2x + \lambda = 0;$$

$$F'_y = 2y + \lambda = 0;$$

$$F'_\lambda = x + y - 1 = 0.$$

Решением этой системы являются точки  $x = 1/2$ ,  $y = 1/2$ ,  $\lambda = -1$ .

Определим теперь:  $z'_x = 2x$ ;  $z'_y = 2y$ ;

$$z''_{xx} = 2; \quad z''_{yy} = 2; \quad z''_{xy} = 0.$$

Тогда  $D = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 4 > 0$  – в точке  $x = 1/2$ ,  $y = 1/2$  – экстремум.

Поскольку  $z''_{xx} > 0$ , то это точка минимума.

### ЗАДАНИЕ

Найти точки условного экстремума:

1)  $f(x, y) = x \cdot y$ , если  $x + y = 1$ ;

2)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , если  $x - y = 1$ ;

3)  $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y$  в треугольнике, ограниченном прямыми  $x = 1$ ,  $y = 1$ ,  $x + y = 1$ ;

4) из всех треугольников, вписанных в круг, найти тот, чья площадь наибольшая.

## 15. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. СИМПЛЕКС-МЕТОД.

### ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Общей задачей линейного программирования (ЛП) называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (15.1)$$

при условиях:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k \leq b_k \\ a_{k+1}x_{k+1} + a_{k+2}x_{k+2} + \dots + a_mx_m = b_m; \\ x_j > 0 \quad (j = 1, \dots, l, 1 \leq n), \end{array} \right. \quad (15.2)$$

где  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_j$  – заданные постоянные величины.

Функция  $F(x)$  – **целевая функция**, условия (15.2) – ограничения данной задачи.

Совокупность чисел  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющих ограничениям (15.2) задачи ЛП, называется **допустимым решением** (или **планом**).

План  $X^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , при котором целевая функция принимает свое максимальное (или минимальное) значение, называется **оптимальным**. То есть  $F(X^*) \geq F(X)$  (при поиске минимального значения целевой функции  $F(X^*) \leq F(X)$ ).

Множество планов задачи ЛП образует выпуклый многогранник. Каждая из вершин этого многогранника определяет так называемый опорный план. В одной из вершин многогранника решений, т.е. для одного из опорных планов, значение целевой функции является максимальным. Если максимальное значение функция принимает более чем в одной вершине, то это значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией данных вершин.

Вершину многогранника решений, в которой целевая функция принимает максимальное значение, найти сравнительно просто, если задача содержит не более двух свободных переменных, т.е.  $n-r \leq 2$ , где  $n$  – число переменных,  $r$  – ранг матрицы  $A$ .

Например, найдем решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \quad (15.3)$$

при условиях:

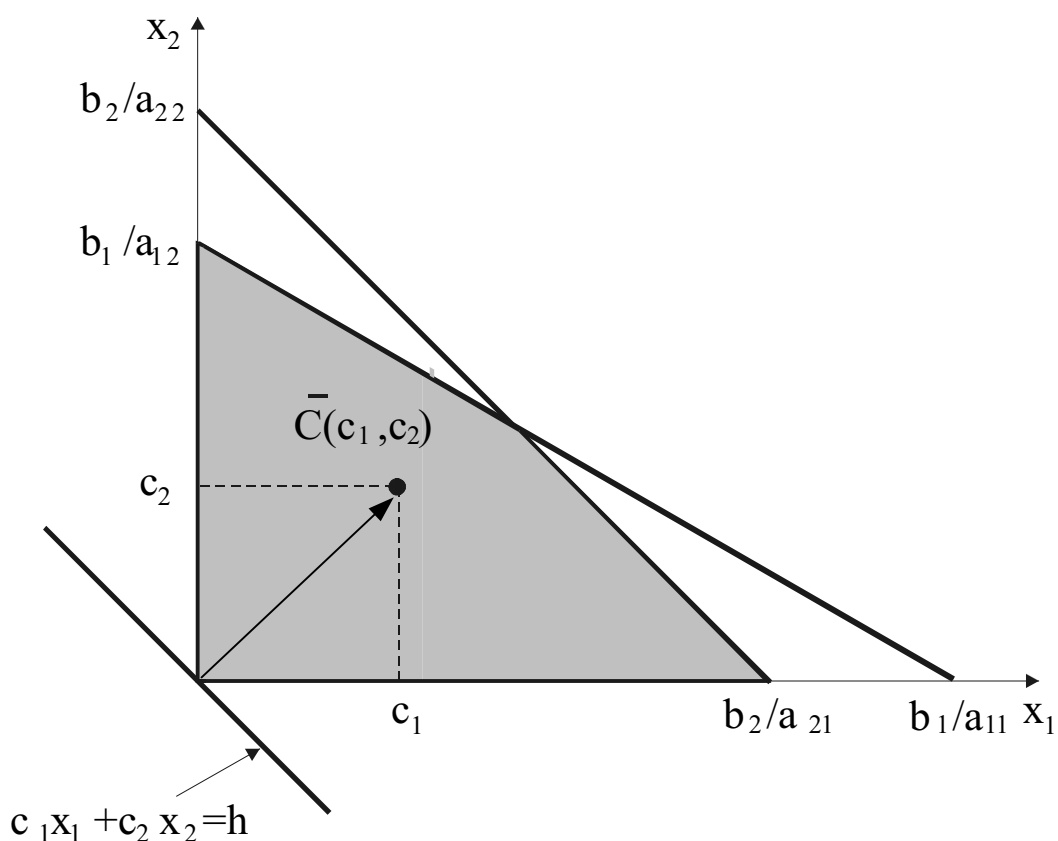
$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \end{array} \right. \quad (15.4)$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

Каждое из неравенств (15.4) системы ограничений геометрически определяет полуплоскость, ограниченную прямыми

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i, x_1 = 0, x_2 = 0. \quad (15.5)$$

В том случае если система неравенств (15.3), (15.4) совместна, область ее решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям. Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей выпуклое, то областью допустимых решений задачи (15.3), (15.4) является выпуклое множество, которое называется **многоугольником решений** (рис. 21). Стороны этого многоугольника лежат на прямых (15.5).



*Рис. 21. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования*

Таким образом, исходная задача ЛП состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция  $F$  принимает максимальное значение. Эта точка су-



существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение.

Для геометрической интерпретации этого объяснения построим линию уровня  $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ , где  $h$  – некоторая постоянная. Пусть эта линия пересекает многоугольник решений и передвигается в направлении вектора  $C(c_1, c_2)$  до тех пор, пока она не пройдет через последнюю точку многоугольника решений (рис.21).

Отметим, что максимальное значение целевая функция может принимать только в одной точке или в любой точке отрезка (см. рис. 21).

Нахождение минимального значения линейной функции при данной системе ограничений отличается от нахождения ее максимального значения при тех же ограничениях лишь тем, что линия уровня  $c_1x_1 + c_2x_2 = h$  передвигается не в направлении вектора  $C = (c_1, c_2)$ , а в противоположном направлении.

Итак, нахождение решения задачи линейного программирования на основе ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. Строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (15.2) знаков неравенства на знаки точных равенств.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений.

3. Находят многоугольник решений.

4. Строят вектор  $C(c_1, c_2)$ .

5. Строят прямую  $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ , проходящую через многогранник решений.

6. Передвигают прямую  $c_1x_1 + c_2x_2 = h$  в направлении вектора  $C$ . В результате находят точку (линию), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.

7. Определяют координаты точки максимума функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

### Пример:

Для производства мороженого и шербета небольшому цеху требуются молоко и сахар.

Нормы расхода продуктов для производства 1 порции мороженого или шербета представлены в таблице.

Вид продукта	Нормы расхода продуктов на 1 порцию, кг или л		Количество продуктов, отпускаемых на смену
	Мороженое	Шербет	
1. Молоко	0,15	0,05	50
2. Сахар	0,1	0,15	50
Прибыль от продажи 1-й порции, руб.	1	1,2	

Найти количество порций мороженого  $x_1$  и шербета  $x_2$ , выпуск и реализация которых обеспечат максимальную прибыль цеху.

### Решение

Постановка задачи: найти  $\text{MAX}(1 \cdot x_1 + 1,2 \cdot x_2)$  при ограничениях:  $0,15 \cdot x_1 + 0,05 \cdot x_2 \leq 50$ ;

$$0,1 \cdot x_1 + 0,15 \cdot x_2 \leq 60.$$

Решение задачи представлено на рис. 22.

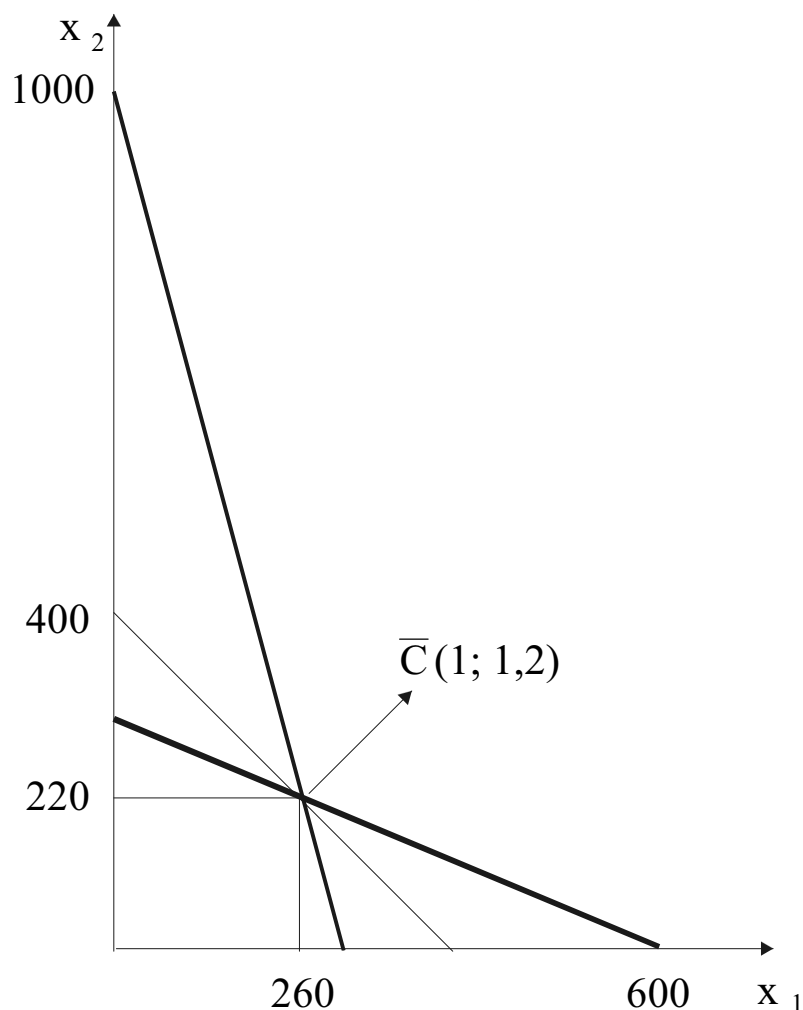
Графическое решение задачи дает  $x_1 \approx 260$ ,  $x_2 \approx 220$ .

## СИМПЛЕКС-МЕТОД

Одним из основных методов решения задачи ЛП является симплекс-метод. Метод основан на том, что решением задачи ЛП является одна из вершин выпуклого многогранника (оптимальный опорный план). Следовательно, решение задачи ЛП следует искать среди вершин этого многогранника решений.

Симплекс-метод предусматривает поэтапный перебор вершин многогранника, который обеспечивает возрастание

значения целевой функции  $F(\mathbf{x})$  до полного решения задачи (определения оптимального плана).



*Рис. 22. Графическое решение задачи ЛП*

Пусть на первом этапе выбрана вершина  $V_k$  (координаты которой называются базисным решением задачи). Тогда переход из вершины  $V_k$  в соседнюю вершину выбирают в направлении того из ребер, выходящих из  $V_k$ , вдоль которого целевая функция  $F(\mathbf{x})$  быстрее всего возрастает. Например, если функция  $F(\mathbf{x})$  быстрее всего возрастает вдоль ребра  $V_k V_{k+1}$ , то переход осуществляется в вершину  $V_{k+1}$  и на следующем этапе рассматривается значение функции в этой вершине (рис. 23).

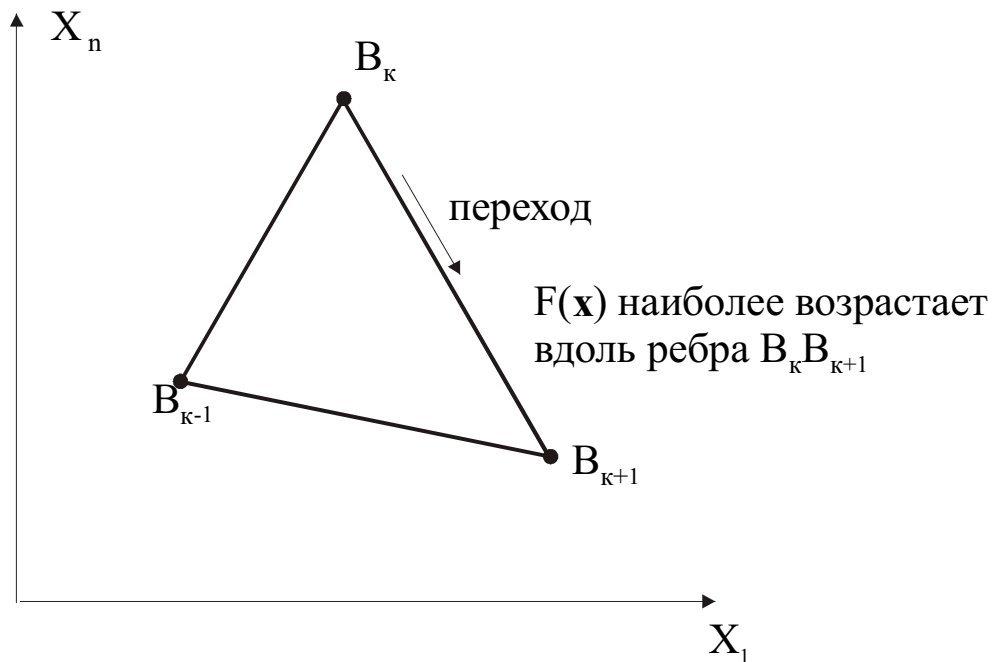


Рис. 23. Геометрическая интерпретация симплекс-метода

Алгоритм продолжается до определения вершины  $B^*$ , координаты которой и являются решением задачи ЛП:  $F(B^*) \geq F(B)$ .

### ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Общая постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из  $m$  пунктов отправления  $A_1, A_2, \dots, A_m$  в  $n$  пунктов назначения  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .

При этом в качестве критерия оптимальности обычно берется либо минимальная стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки.

Рассмотрим транспортную задачу, в качестве критерия оптимальности которой взята минимальная стоимость перевозок груза. Обозначим через  $c_{ij}$  тарифы перевозки единицы груза из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -й пункт назначения, через  $a_i$  – запасы груза в  $i$ -м складе, через  $b_j$  – потребности в грузе в

$j$ -м пункте назначения. Пусть также  $x_{ij}$  – количество груза, перевозимого из  $i$ -го склада в  $j$ -й пункт назначения (рис. 24).

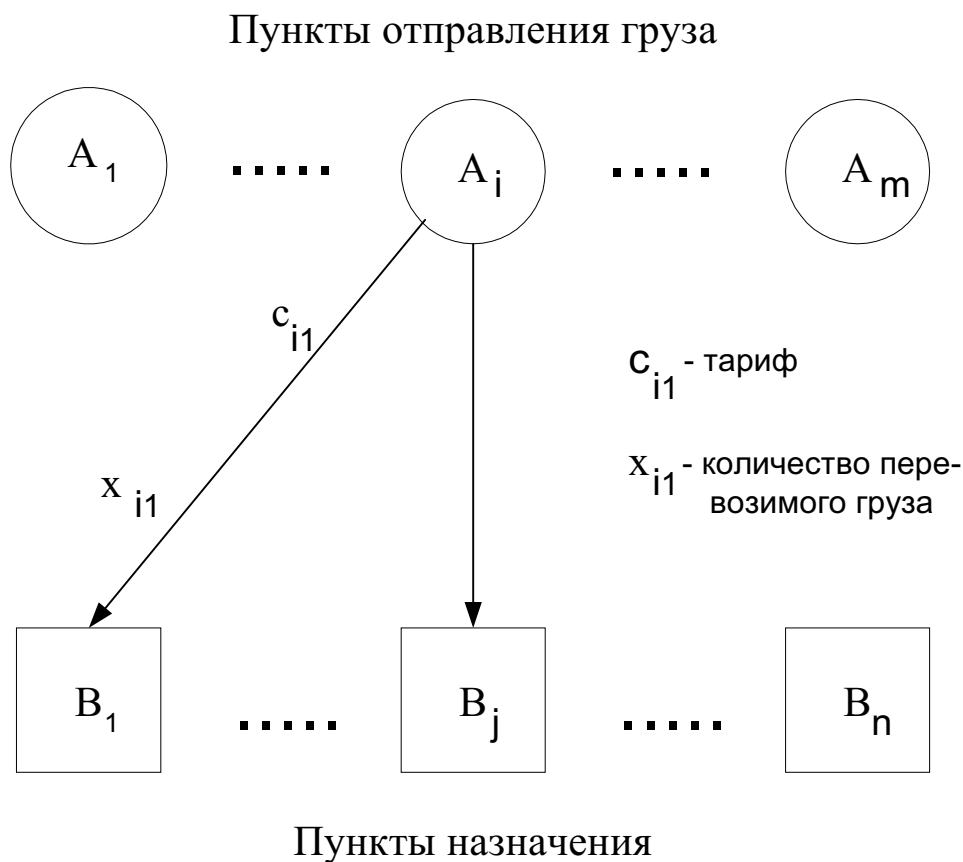


Рис. 24. Транспортная задача

Тогда математическая формулировка транспортной задачи состоит в определении минимального значения функции

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (15.6)$$

при условиях:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j \quad (j = 1, \dots, n); \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i \quad (i = 1, \dots, m); \\ x_{ij} &\geq 0. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Всякое неотрицательное решение системы линейных уравнений (15.7), определяемое матрицей  $X = (x_{ij})$ , называется **планом** транспортной задачи.

План  $X^*$ , при котором функция (15.6) принимает свое минимальное значение, называется **оптимальным планом** транспортной задачи.

Обычно исходные данные транспортной задачи записываются в виде следующей таблицы.

Таблица

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы
	$B_1 \dots$	$B_j \dots$	$B_n \dots$	
$A_1$	$c_{11}$ $x_{11}$	$c_{1j}$ $x_{1j}$	$c_{1n}$ $x_{1n}$	$a_1$
...				
$A_i$	$c_{i1}$ $x_{i1}$	$c_{ij}$ $x_{ij}$	$c_{in}$ $x_{in}$	$a_i$
...				
$A_m$	$c_{m1}$ $x_{m1}$	$c_{mj}$ $x_{mj}$	$c_{mn}$ $x_{mn}$	$a_m$
Потребности	$b_1$	$b_j$	$b_n$	

Очевидно, что общее наличие груза у поставщиков  $\sum_{i=1}^m a_i$ , а общая потребность в этом грузе в пунктах назначения  $\sum_{j=1}^n b_j$ .

Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j ,$$

то модель такой транспортной задачи называется **закрытой**.

Если вышеуказанное условие не соблюдается, то модель транспортной задачи называется **открытой**.

### Теорема

Для разрешимости транспортной задачи необходимо, чтобы запасы груза на складах были равны потребностям в грузе в пунктах назначения.

Замечание. В случае превышения запасов над потребностью вводится фиктивный  $(n+1)$ -й пункт назначения, потребности которого полностью "закрывают" бы транспортную задачу, а соответствующие тарифы в этот пункт назначения считались бы равными нулю.

В случае превышения потребностей над запасами вводится фиктивный склад с запасами, покрывающими потребности потребителей и равными нулю тарифами по поставкам груза с этого склада.

### ЗАДАНИЕ

**Задача 1.** На ферме выращивают лисиц и песцов. Для их выращивания требуются три вида кормов. Нормы расхода кормов в месяц представлены в таблице. Требуется определить количество лисиц и песцов, выращивание которых обеспечит максимальную прибыль ферме.

Вид кормов	Количество единиц корма, которые должны получать в неделю, кг		Корма, отпускаемые ферме в неделю, кг
	лисица	песец	
1	2	3	1800
2	3	4	2600
3	4	8	4000
Прибыль от реализации 1-го зверька, руб.	160	120	

**Задача 2.** Песок поставляется с двух карьеров на 3 комбината строительных конструкций.

Тарифы перевозок грузов одинаковы и пропорциональны расстояниям. Производительность карьеров:  $K_1 = 60$  т/сутки и  $K_2 = 80$  т/сутки.

Потребности комбинатов:

$C_1 = 30$  т/сутки,  $C_2 = 50$  т/сутки,  $C_3 = 60$  т/сутки.

Расстояния между карьерами (первый индекс) и комбинатами (второй индекс) равны:

$$r_{11} = 5 \text{ км}, r_{12} = 6 \text{ км}, r_{13} = 8 \text{ км};$$

$$r_{21} = 7 \text{ км}, r_{22} = 5 \text{ км}, r_{23} = 5 \text{ км}.$$

Определить, какое количество песка необходимо поставлять с каждого карьера на каждый комбинат, чтобы обеспечить минимальные расходы на транспортировку.

## 16. ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача нелинейного программирования (ЗНП) состоит в определении максимального или минимального (экстремального) значения функции  $F(X) = F(x_1 \dots x_n)$  при условии, что ее переменные удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} g_i(x_1 \dots x_n) &\leq b_i \quad (i = 1 \dots k); \\ g_i(x_1 \dots x_n) &= b_i \quad (i = k+1 \dots m). \end{aligned} \quad (16.1)$$

Здесь  $f(x)$  и  $g_i(x)$  – некоторые неизвестные функции  $n$  переменных (в общем случае – нелинейные),  $b_i$  – заданные числа.

Соотношения (16.1) задают область допустимых значений ЗНП. В отличие от задачи линейного программирования эта область не всегда является выпуклой.

Решение ЗНП состоит в определении такой точки  $X^* = (x_1 \dots x_n)$  области допустимых решений, в которой функция  $F(x)$  достигает экстремального значения, т.е.  $F(X^*) \geq F(X)$  или



$F(X^*) \leq F(X)$  для любых точек  $X = (x_1 \dots x_n)$  из области допустимых решений ЗНП. В общем случае решение задачи сводится к определению такой точки  $X^*$  области допустимых решений, через которую проходит гиперповерхность максимального (или минимального) уровня:  $F(X) = H_{\max}$  (или  $H_{\min}$ ). Указанная точка может находиться как на границе области допустимых решений, так и внутри ее.

Для случая двух переменных решение ЗНП можно получить с использованием ее геометрической интерпретации путем реализации следующих этапов:

1. Построить область допустимых решений.
2. Построить гиперповерхность  $F(X) = H$ .
3. Определить гиперповерхность максимального (минимального) уровня или установить неразрешимость задачи из-за неограниченности функции  $F(X)$  на множестве допустимых решений.
4. Найти точку  $X^*$  области допустимых решений, через которую проходит гиперповерхность экстремального значения и определить значение функции  $F(X)$  в этой точке –  $F(X^*)$ .

#### Пример:

Фирма готова инвестировать не более 200 млн. руб. в два проекта А и В. Прибыль от вложения  $X$  млн. руб. в проект А составит  $\sqrt{X}$  млн. руб. от его реализации, прибыль от вложения  $Y$  млн. руб. в проект В составит  $2\sqrt{Y}$  млн. руб.

Определить оптимальное распределение суммы инвестиций между проектами А и В, которое обеспечит максимальную прибыль в результате реализации обоих проектов.

#### Решение

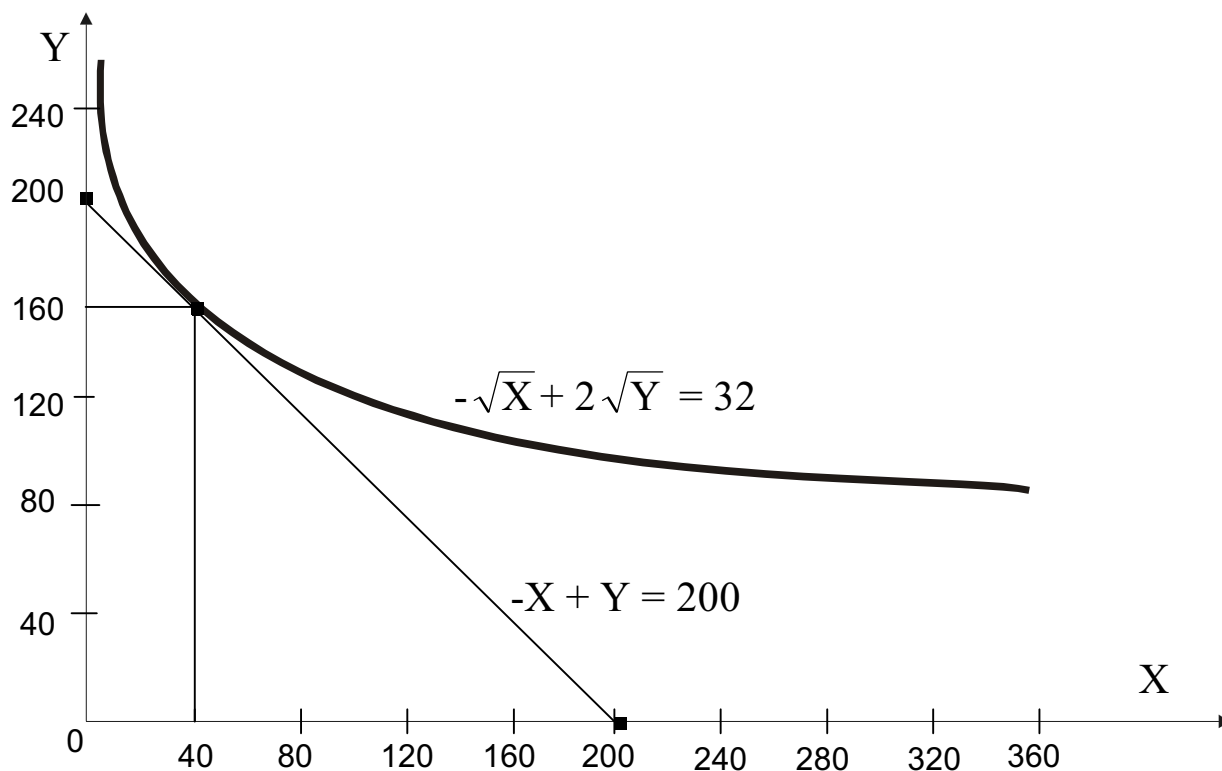
Требуется найти максимальное значение функции

$$F = \sqrt{X} + 2\sqrt{Y}.$$

Область допустимых решений задачи – треугольник ABC, ограниченный прямой  $X + Y = 200$  и отрезками  $[0, 200]$  на оси OX и  $[0, 200]$  на оси OY.

Полагая значение функции  $F(X, Y)$  равным некоторому числу  $H$ , получаем линии уровня, представленные на рисунке 25. С увеличением  $H$  значения функции  $F$  увеличиваются.

Последнего контакта с областью допустимых решений гиперповерхность максимального значения  $F(X, Y) = 32$  достигает в граничной точке области допустимых решений  $X^* = 40, Y^* = 160$ .



*Рис. 25. Геометрическое решение ЗНП*

Для аналитического решения ЗПН можно применить метод множителей Лагранжа.

Задача динамического программирования (ЗДН) является многоэтапной, на каждом этапе которых определяется решение некоторой частной задачи.

Предположим, что некоторая организационно-экономическая система ОЭС в начальный момент времени  $t_0$  находится в определенном состоянии  $S_0$ . В результате управления  $U$  система переходит из своего начального состояния  $S_0$

в конечное состояние  $S_{\text{кон}}$ . Для оценки качества управления системой выбирается функция  $W = W(U)$ .

Задача состоит в том, чтобы из множества возможных управлений ( $U$ ) найти такое  $U^*$ , при котором функция  $W(U)$  принимает экстремальное значение  $W(U^*)$ .

Дадим геометрическую интерпретацию ЗДН (рис. 26).

Предположим, что состояние ОЭС характеризуется некоторой точкой  $S$  на множестве  $X_1O X_2$  параметров этой точки. Под действием управления  $U$  эта точка переходит из одного состояния в другое, перемещаясь вдоль линии, определяемой значениями параметров системы  $S = S(X_1, X_2)$ . Каждому управлению  $U$  движением точки, т.е. каждой траектории движения точки, поставим в соответствие значение некоторой функции  $W(U)$  (например, прибыль предприятия, полученная за планируемое количество лет его работы). Тогда задача состоит в том, чтобы из всех допустимых траекторий развития ОЭС найти такую, которая в результате реализации управления  $U^*$  обеспечит экстремальное значение функции  $W(U)$ .

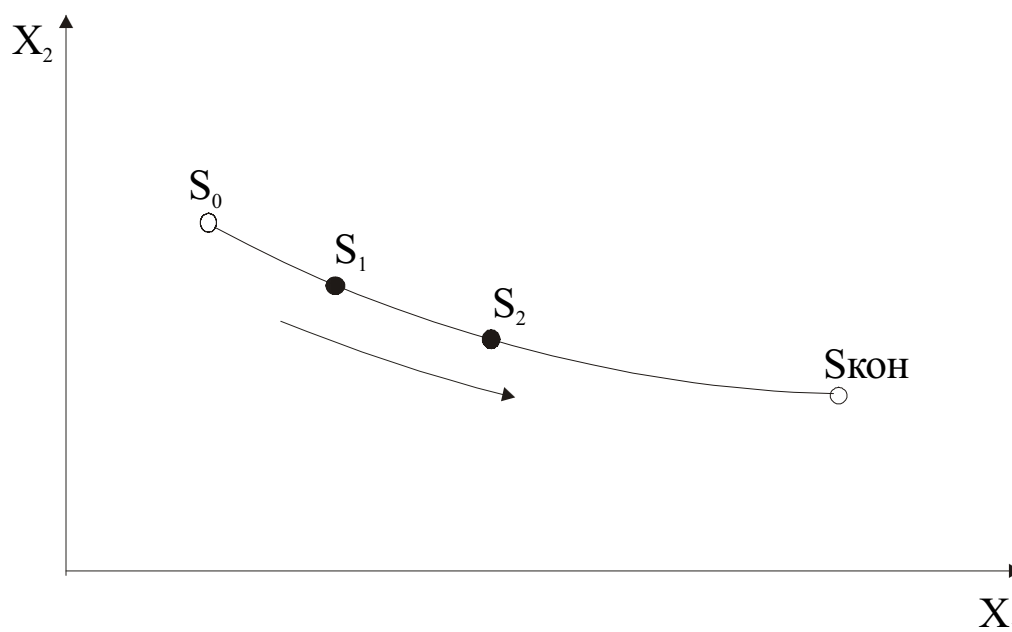


Рис. 26. Геометрическая интерпретация ЗДП

### Пример:

Фирме принадлежит  $n$  рентабельных предприятий. В начале каждого года она перераспределяет прибыль, полученную от этих предприятий, на финансирование их хозяйственной деятельности в размере  $(x_1 \dots x_n)$ . Планируется деятельность фирмы на ближайшие  $m$  лет.

Задача состоит в определении таких значений  $(x_{1i} \dots x_{ni})$ ,  $(i = 1, 2 \dots m)$ , т.е. в нахождении таких распределений финансовых средств между предприятиями на каждый  $i$ -й год  $(i = 1, 2 \dots m)$ , при которых за  $m$  лет обеспечивается получение максимальной прибыли всем предприятиям фирмы.

### Постановка задачи

Распределение средств между  $n$  предприятиями на  $i$ -й год  $(x_{1i} \dots x_{ni})$  будем рассматривать как реализацию некоторого управления  $u_i$ . Тогда совокупность векторов  $(x_{1i} \dots x_{ni})$ ,  $(i = 1, 2 \dots m)$  определяет всю совокупность управлений  $u_1, u_2 \dots u_m$  на  $m$  шагах распределения средств.

В качестве критерия оценки качества управления взята суммарная прибыль за  $m$  лет, которая зависит от всей совокупности управлений:  $W = W(u_1 \dots u_m)$ .

Следовательно, задача состоит в выборе таких управлений  $u^*$ , т.е. в таком распределении средств, при котором функция  $W$  принимает максимальное значение.

\* \* \*

Рассмотрим в общем виде решение ЗДП. Будем считать, что состояние рассматриваемой ОЭС на каждом шаге определяется совокупностью ее параметров  $X_k = (x_{1k}, x_{2k} \dots x_{nk})$ . Эти параметры были получены в результате реализации управления  $u_k$ , обеспечивающего переход системы из  $(k-1)$ -го состояния в  $k$ -е состояние. При этом будем полагать, что  $k$ -е состояние зависит от предыдущего  $(k-1)$ -го состояния и выбранного управления  $u_k$  и не зависит от того, каким образом система

перешла в это  $(k-1)$ -е состояние. Напомним, что каждое состояние системы характеризуется набором своих параметров.

Далее будем считать, что если в результате реализации  $k$ -го шага получен определенный доход, также зависящий от предыдущего  $(k-1)$ -го состояния системы и выбранного управления и равный  $W(X_{k-1}, u_k)$ , то общий доход за  $n$  шагов составляет

$$F = \sum_{k=1}^n W(x_{k-1}, u_k). \quad (16.2)$$

Эти два условия позволяют сформулировать для ЗДП принцип оптимальности, позволяющий устанавливать правило построения для этой задачи оптимальной стратегии управления, т.е. такой совокупности управлений  $(u_1, u_2 \dots u_n)$ , в результате реализации которой система за  $n$  шагов переходит из начального положения в конечное и при этом функция  $W$  принимает максимальное значение.

#### Принцип оптимальности Беллмана

Каково бы ни было состояние системы перед очевидным шагом, надо выбрать управление на этом шаге таким, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах были максимальными.

Отсюда следует, что оптимальную стратегию управления можно получить, если сначала найти оптимальную стратегию управления на последнем  $k$ -м шаге, затем на двух последних шагах и т.д. вплоть до первого шага.

Дадим математическую формулировку принципа оптимальности. Для этого обозначим через  $F_n(X_0)$  – максимальный доход, полученный за  $n$  шагов при переходе системы из начального состояния  $X_0$  в конечное состояние  $X_n$  при реализации оптимальной стратегии управления  $U = (u_1 \dots u_n)$ , а через

$F_{n-k}(X_k)$  – максимальный доход, полученный при переходе из любого состояния  $X_k$  в конечное состояние  $X_n$  при оптимальной стратегии управления на оставшихся  $(n-k)$  шагах. Тогда можно получить основное функциональное уравнение Беллмана:

$$F_{n-k}(X_k) = \max_{u_{k+1}} [W_{k+1}(X_k, u_{k+1}) + F_{n-k-1}(X_{k+1})] \quad (16.3)$$

$(k = 0, 1, \dots, n-1).$

В результате решения этого уравнения путем определенной итерационной процедуры и получаем решение ЗДП.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I и II: Уч. пособие для студентов вузов.- М.: Высшая школа, 1980.

2. Карташев А.П.,Рождественский Б.Л. Математический анализ.– М. :Наука, 1984. – 448 с.

3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980. – 176 с.

4. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Уч. пос. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.

