КРАТКИЙ КУРС

ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Учебное пособие

Учебное пособие предназначено для студентов-заочников 2 курса

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

1.1. Случайные явления

Теорией вероятностей называется математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Случайное явление – это такое явление, которое в серии однотипных экспериментов под действием случайных факторов может приводить к различным результатам.

В природе нет ни одного явления, которое не было бы под действием случайных факторов.

Примеры:

1. Спортсмен проводит серию выстрелов по мишени. Результаты выстрелов могут отличаться друг от друга, несмотря на постоянство условий стрельбы.
2. Игрок в одинаковых условиях бросает игральную кость. В зависимости от случайных факторов могут выпадать различные цифры: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
3. Автоматический пресс штампует детали. В зависимости от структуры металла, небольших сбоев оборудования и т.д. малое число деталей изготовляется с браком.

Практика показывает, что действие массы случайных факторов определяет свойство устойчивости случайного явления. Например, частота выпадения грани с цифрой 3 при многократном бросании игральной кости приближается к 1/6. Частота выпадения "решки" при многократном бросании монеты примерно равна 1/2.

Теория вероятности занимается только такими случайными явлениями, для которых предполагается устойчивость частот.

1.2. Случайные события

Пусть проводится случайный эксперимент, результат которого точно нельзя предугадать заранее. В зависимости от случайных факторов возможны различные исходы этого эксперимента.

Тогда этому эксперименту можно сопоставить пространство элементарных событий, которое включает всевозможные исходы этого эксперимента.

Элементарное событие является одним из элементов этого пространства и определяет один из возможных исходов случайного эксперимента. Случайное событие А является подмножеством пространства элементарных событий и включает одно или группу элементарных событий, каждое из которых благоприятствует А.

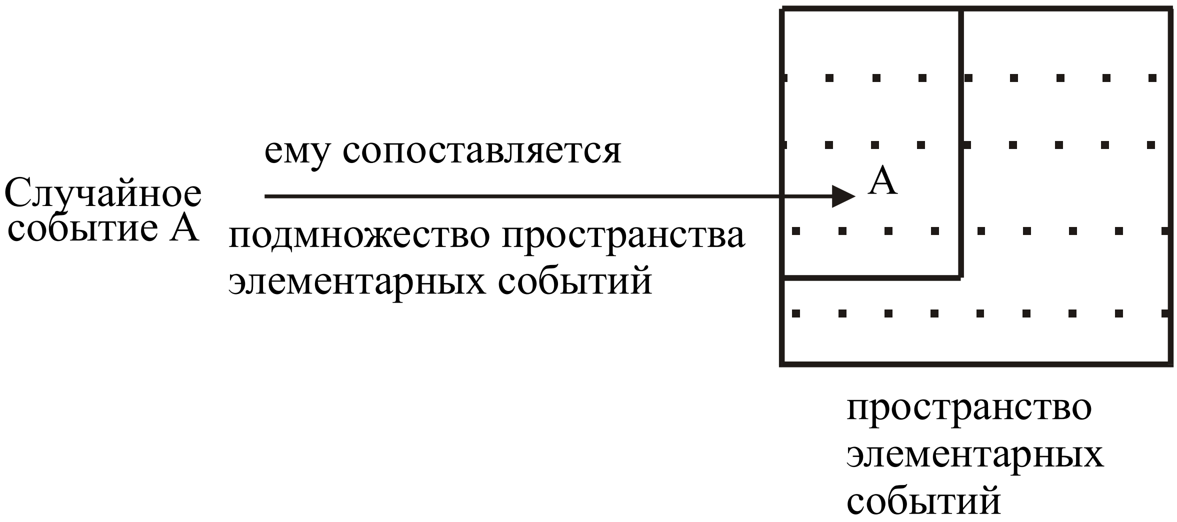


Рис.1. Геометрическое представление случайного события

Примеры:

1. Опыт – выстрел в мишень. Случайное событие – попадание.

2. Опыт – бросание игральной кости. Рассматривается случайное событие – выпадение четного числа. Ему благоприятствуют элементарные события: выпадение 2, 4, 6.

3. Опыт – вынимание наугад карты из колоды. Рассмат-

ривается случайное событие – появление туза. Это событие включает элементарные события: появление туза червь, крест, бубнового туза и туза пик.

1.3. Вероятность случайного события

Рассмотрим случайный эксперимент, в котором наблюдается событие А. Повторим эксперимент n раз и пусть событие А наблюдалось k раз. Отношение $\nu_n = k/n$ называется частотой события А в этой серии экспериментов.

Если при увеличении n число ν_n стремится к пределу p, то говорят, что событие А устойчиво, а число p является вероятностью события А. Вероятность p может принимать значения: $0 \le p \le 1$.

Другими словами, если эксперименту можно сопоставить пространство, состоящее из n возможных элементарных исходов этого эксперимента, а случайному событию А благоприятствует k из этих элементарных исходов, то вероятность случайного события А равна

$$p(A) = \frac{k}{n}. \tag{1.1}$$

Условной вероятностью события А при условии, что произошло событие В, называют отношение

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}, \tag{1.2}$$

где $A \cdot B$ – случайное событие, которое включает элементарные исходы, принадлежащие одновременно событиям А и В.

Группа случайных событий A_1, A_2, ... A_n образуют полную группу событий, если:

а) объединение этих событий включают все возможные элементарные исходы эксперимента,

б) ни одна пара случайных событий не имеет общих элементарных исходов.

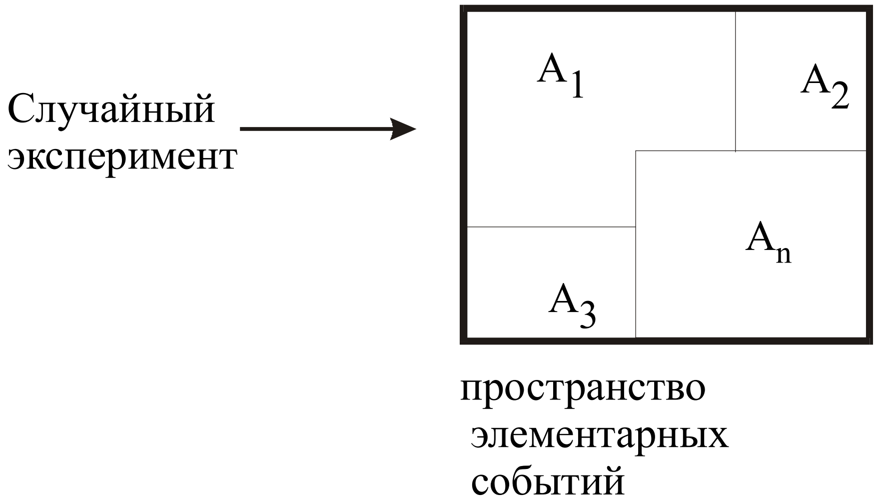


Рис.2. Полная группа событий A_1, A_2, A_3, ..., A_n

Так как объединение событий полной группы является событием достоверным, то для таких событий имеет место равенство:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_n) = 1. \tag{1.3}$$

Два события A_1 и A_2 называются независимыми, если условная вероятность одного из них по отношению к другому равна безусловной вероятности этого же события:

$$P(A_2/A_1) = P(A_2). \tag{1.4}$$

Для независимых событий вероятность их совмещения равна произведению их вероятностей:

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_2) \cdot P(A_1). \tag{1.5}$$

Вероятность совмещения n событий, независимых в их совокупности, равна произведению вероятностей:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots P(A_n). \tag{1.6}$$

Примеры:

1. Найти вероятность p, что при бросании игральной кости выпадет число, которое делится на 3.

Решение

Пространство элементарных событий включает числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Событию А благоприятствуют исходы, когда выпадают грани с цифрами 3 и 6. Следовательно, число благоприятных исходов k= 2. Тогда вероятность p = 2/6 = 1/3.

2. Из колоды в 36 карт случайным образом вытаскивают 1 карту. Определить вероятность, что вытащен туз.

Решение

Всего возможных исходов n = 36.

Событию А благоприятствует, когда вытащен туз пик, крест, туз червей или бубновый туз, всего таких исходов k = 4. Тогда вероятность события p = 4/36 = 1/9.

3. Монета подброшена два раза. Какова вероятность, что оба раза выпадет герб?

Решение

Событие A_1 – появление в первом опыте герба – и событие A_2 – появление во втором опыте герба – являются независимыми. Причем, $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$.

Для независимых событий вероятность их совместного появления (совмещения) равна:

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4.$$

4. Спортсмен с вероятностью $p_1 = 0{,}9$ преодолевает первое препятствие, с $p_2 = 0{,}8$ – второе и с вероятностью $p_3 = 0{,}85$ – третье препятствие. Найти вероятность P, что он в ходе соревнования преодолеет все три препятствия.

Решение

Все три события являются независимыми, успех или неудача на одном из препятствий не влияют на результат на следующем рубеже соревнования.

Поэтому $P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}85 = 0{,}612$.

5. Найти вероятность, что из колоды в 36 карт последо-

вательно будут вытащены два туза.

Решение

Вероятность первого события (из колоды в 36 карт будет вытащен туз) равна $p_1 = 4/36 = 1/9$.

Вероятность второго события (из колоды уже в 35 карт будет вытащен один из трех тузов) равна $p_2 = 3/35$. Тогда вероятность совмещения этих событий равна

$$P = p_1 \cdot p_2 = 1/9 \cdot 3/35 = 1/105.$$

6. Машина участвует в пятидневном автопробеге. Вероятность выхода из строя машины в течение одного дня равна $p = 0{,}05$. Найти вероятность P, что машина ни разу не выйдет из строя в течение всего автопробега.

Решение

Отметим, что 1-p – вероятность, что машина не выйдет из строя в течение одного дня.

Тогда $P = (1-p)^5$ – вероятность того, что машина не будет иметь поломок за весь автопробег. При малом p можно приближенно оценить $P \approx 1-5 \cdot p = 0{,}75$.

7. Первая группа состоит из 16 студентов, вторая – из 20. В первой группе учится один отличник, во второй – два. Случайным образом комиссия выбирает по одному человеку из каждой группы. Найти вероятность P, что среди выбранных двух человек окажется только один отличник.

Решение

Такой результат может оказаться в двух случаях, если в эту пару войдет отличник из первой группы, а из второй не войдет. Либо в эту пару войдет отличник из второй группы, а из первой – студент с удовлетворительными оценками.

Тогда $P = P_{отл} \cdot P_{удовл} + P_{удовл} \cdot P_{отл}$,

или $P = 1/16 \cdot (20-2)/20 + (16-1)/16 \cdot 2/20 = 3/20$.

ЗАДАНИЕ 1

1. В пачке 2 фальшивые и 8 настоящих денежных купюр. Из пачки вытащили 2 купюры подряд. Найти вероятность, что обе они фальшивые.

2. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания для первого $p_1 = 0{,}9$, для второго $p_2 = 0{,}8$ и для третьего $p_2 = 0{,}7$. Найти вероятность, что первый и второй попадут в цель, а третий сделает промах.

3. Найти вероятность, что из колоды в 52 карты можно последовательно вытащить тройку, семерку и туз.

4. В барабанном магазине револьвера 8 патронов, один из них холостой. Найти вероятность Р, что при трех выстрелах из него два будут боевые, а третий холостой.

5. Производится стрельба ракетами по самолету. Вероятность поражения цели одной ракетой равна $p = 0{,}9$. Найти вероятности:

а) поражения цели только с третьего выстрела,

б) промаха первых двух выстрелов,

в) поражения самолета после первых двух выстрелов.

6. Проводятся испытания прибора. За один час прибор выходит из строя с вероятностью $p = 0{,}05$. Найти вероятность, что прибор выйдет из строя в течение первых трех часов.

Найти вероятность, что прибор не выйдет из строя ровно на втором часе работы.

7. В первом ящике $a = 12$ белых и $б = 7$ черных шаров. Во втором ящике $c = 4$ белых и $в = 6$ черных шаров. Из второго ящика перекладывают в первый один шар (без уточнения цвета). Найти вероятность, что после этого при произвольном вытаскивании из первого ящика шара будет вынут белый шар.

1.4. Формула Бернулли. Формула Пуассона

Пусть производится N независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна р.

Тогда вероятность того, что событие А появится в этих N испытаниях ровно M раз, выражается формулой Бернулли:

$$P_N(M) = C_N^M \cdot p^M \cdot (1-p)^{(N-M)},$$

$$\text{где } C_N^M = \frac{N!}{M! \cdot (N-M)!}. \qquad (1.7)$$

Если p отлично от 0 или 1, то наивероятнейшее число M_0 наступлений события А в серии из N испытаний равно

$$N \cdot p - g < M_0 < N \cdot p + p,$$

где $g = 1 - p$.

Если число испытаний N велико, а вероятность появления события А $p \sim 0$, то, обозначив $N \cdot p = a$, получаем формулу Пуассона:

$$P(M) = \frac{a^M \cdot EXP(-a)}{M!}. \qquad (1.8)$$

Формула Пуассона определяет вероятность появления события А ровно M раз в большой серии испытаний с малой вероятностью наступления этого события в каждом эксперименте.

Примеры:

1. Баскетболист попадает в корзину со штрафного броска с вероятностью $p = 4/5$. Найти вероятность P, что в серии из $N = 5$ бросков он попадет ровно $M = 4$ раза.

Решение

Согласно формуле Бернулли:

$$P_5(4) = 5!/(4! \cdot 1) \cdot (4/5)^4 \cdot (1/5)^1 \approx 0{,}41.$$

Наивероятнейшее число попаданий равно:

$$5 \cdot 4/5 - 1/5 < M_0 < 5 \cdot 4/5 + 4/5, \text{ т.е. } 3 < M_0 < 5.$$

2. Проверку на допинг-контроль успешно проходит 99% спортсменов. Найти вероятность, что при проверке 100 спортсменов будет получен только один положительный результат.

Решение

Вероятность положительного результата при проверке одного спортсмена р = 1 – 9,99 = 0,01.

В этом случае а = 100·0,01 = 1.

Тогда Р(1) = 1· EXP(-1)/1 ≈ 1/2,7 ≈ 0,4.

3. Завод изготовляет детали с браком 0,1%. Найти вероятность, что при выборе 200 деталей брак будет обнаружен два раза.

Решение

В этом случае а = 200 · 0,001 = 0,2.

Тогда

$$P(2) = (0{,}2)^2 \cdot \mathrm{EXP}(-0{,}2)/2 \approx 0{,}02.$$

1.5. Формула полной вероятности. Формула Бейеса

Формула полной вероятности

Если $A_1, A_2, ..A_n$ – полная группа событий, то для любого случайного события В из этого пространства элементарных событий выполняется:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B/A_i). \tag{1.9}$$

Пример 1:

Турист равновероятно выбирает один из трех маршрутов: конный, водный и горный. Вероятность, что он успешно преодолеет путь при выборе конного способа передвижения, равна P_1= 0,8, при выборе водного пути – P_2 = 0,9. При выборе горного маршрута P_3 = 0,4. Найти вероятность Р, что турист успешно преодолеет весь путь при любом выборе маршрута.

Решение

Поскольку выбор маршрута равновероятен, то вероятности выбора каждого маршрута $p_1 = p_2 = p_3$ =1/3. По формуле полной вероятности:

$$`P = P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3 = (1/3)0{,}8 + (1/3)0{,}9 + (1/3)0{,}4 \approx 0{,}7.$$

Пример 2:

В группе студентов 12 юношей и 8 девушек. Экзамен по математике сдает, как правило, 70 % юношей и 80 % девушек. Найти вероятность того, что первый человек, вышедший из аудитории, сдал экзамен по математике.

Решение

Вероятность того, что первый вышедший из аудитории является юношей, равна $p_1 = 12/(12+8) = 3/5$. То, что выйдет девушка, $p_2 = 8/(12+8) = 2/5$. Вероятность, что юноша сдаст экзамен $P_1 = 0{,}7$. Вероятность, что экзамен сдаст девушка, равна $P_2 = 0{,}8$. Тогда искомая вероятность сдачи экзамена человеком, первым вышедшим из аудитории, равна

$$P = P_1p_1 + p_2P_2 = 3/5 \cdot 0{,}7 + 2/5 \cdot 0{,}8 \approx 0{,}74.$$

Формула Бейеса

Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – полная группа событий. Тогда для любого случайного события B вероятность, что оно произойдет при условии, что произошло событие A, определяется соотношением

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot P(B/A_k)}. \quad (1.10)$$

Пример 3:

В условиях примера 1 стало известно, что турист успешно добрался до конца своего маршрута. Найти вероятность P(2/A), что он воспользовался водным маршрутом.

Решение

По формуле Бейеса

$$P(2/A)=\frac{P_2p_2}{P_1p_1+p_2P_2+P_3p_3}=\frac{1/3\cdot(0,9)}{1/3(0,8+0,9+0,4)}=\frac{0,9}{0,8+0,9+0,4}\approx 0,42$$

Пример 4:

В условиях примера 2 стало известно, что человек, вышедший из аудитории, сдал экзамен. Найти вероятность P(1/A),что это юноша.

Решение

По формуле Бейеса

$$P(1/A)=\frac{P_1p_1}{P_1p_1+P_2p_2}=\frac{0,7\cdot(3/5)}{0,7\cdot(3/5)+0,8(2/5)}\approx 0,55\,.$$

ЗАДАНИЕ 2

1. Лекарство с вероятностью p=0,8 излечивает болезнь. Найти вероятность, что из 6 больных, принявших лекарство, вылечатся ровно 4 человека.

2. Среди семян ржи имеется 0,5 % семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 семян обнаружить 5 семян сорняков.

3. Банк с вероятностью p_1=0,7 готов вложить свои финансы в ГКО и с вероятностью p_2 =0,3 предложить кредит крупной торговой фирме. В первом случае вероятность финансового успеха составляет p_{11}= 0,9, а во втором случае p_{21} = 0,8. Найти вероятность финансового успеха при участии в этих финансовых операциях.

4. Если в условиях предыдущей задачи получена неудача, то определить вероятности, что она произошла на рынке ГКО или в результате невозврата кредита торговой фирмой.

РАЗДЕЛ 2. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

2.1. Определение случайной величины

Рассмотрим случайный эксперимент, которому сопоставляется пространство элементарных событий – возможных исходов этого эксперимента. На этом пространстве элементарных событий задана случайная величина X, если задан закон или правило, по которому каждому элементарному событию сопоставляется число. Таким образом, случайную величину X можно рассматривать как функцию, заданную на пространстве элементарных событий.

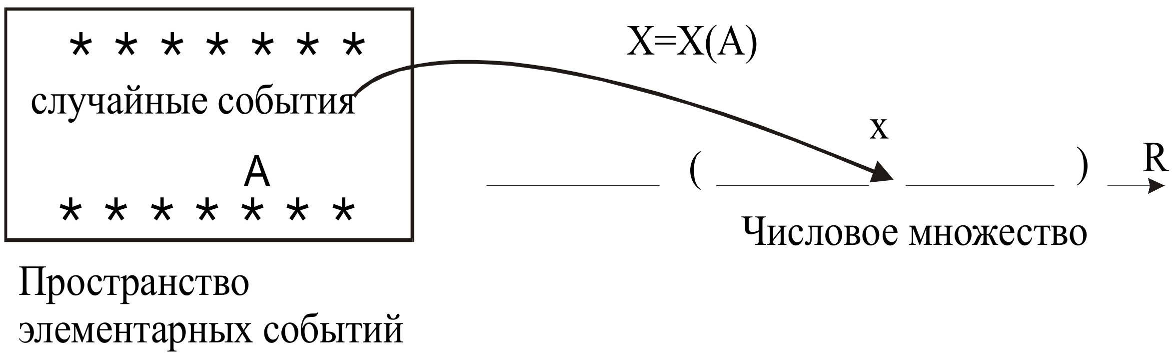


Рис. 3. Определение случайной величины

Случайная величина может принимать значения из некоторого числового множества, однако заранее неизвестно, какое именно. Случайные величины принято обозначать большими буквами X, У, и т.д. , а принимаемые ими значения – строчными буквами x, y, ... Например, при бросании игральной кости случайная величина сопоставляет каждой грани этой кости числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Температура тела является случайной величиной и сопоставляет состоянию организма человека определенные значения, измеряемые градусником.

2.2. Непрерывные и дискретные случайные величины

Если случайная величина X принимает только дискретные значения, т.е. значения $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, то такая случайная величина называется дискретной.

Если же значения случайной величины X занимают некоторый отрезок (c, d), то она называется непрерывной.

Соотношение, которое устанавливает связь между возможными значениями случайной величины X и вероятностями их появления при испытаниях, называется законом распределения случайной величины.

Каждому значению дискретной случайной величины x_n отвечает вероятность p_n. Тогда закон распределения дискретной случайной величины обычно задается рядом распределения:

x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	....	p_n

При этом, $p_1 + p_2 + p_3 + ... p_n = 1$.

Пусть непрерывная случайная величина X принимает значения на отрезке (c, d). Тогда говорят о вероятности $P(a < X < b)$ ее попадания на промежуток (a, b), который принадлежит отрезку (c, d).

Закон распределения непрерывной случайной величины удобно задавать при помощи так называемой функции плотности вероятности – f(x). В этом случае вероятность $P(a < X < b)$ попадания случайной величины X на промежуток (a, b) определяется равенством:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx . \qquad (2.1)$$

График функции f(x) называется кривой распределения. Геометрически вероятность попадания случайной величины X в промежуток (a, b) равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения y = f(x), осью Ox и прямыми x = a и x = b (рис.4).

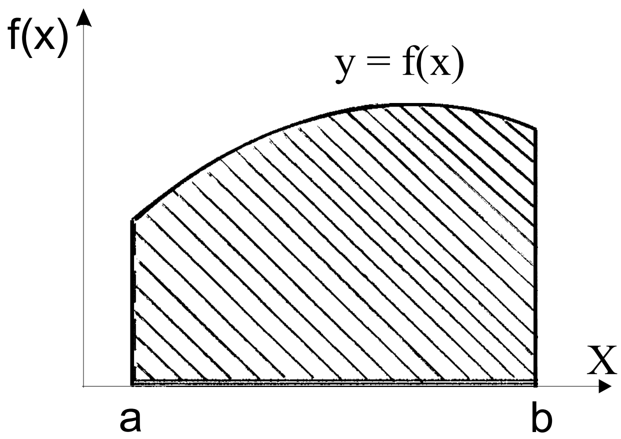


Рис. 4. Кривая распределения y = f(x)

Функция плотности вероятности f(x) обладает следующими свойствами:

1. $f(x) \geq 0$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$.

Введем теперь функцию распределения вероятности F(x) = P(X < x). Функция F(x) существует как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин.

Для непрерывных случайных величин F(x) следующим образом связана с функцией плотности вероятности:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \qquad (2.2)$$

Свойства функции распределения вероятности:

1. F(x) – неубывающая функция.
2. $F(-\infty) = 0$.
3. $F(+\infty) = 1$.

Примеры:

1. Случайная величина X имеет закон распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0 \\ a \cdot (2x - x^2), \text{ при } 0 < x \le 2 \\ 0, \text{ при } x > 2 \end{cases}$$

Требуется найти:

1) коэффициент "a";
2) построить график распределения плотности $y = f(x)$;
3) найти вероятность, что случайная величина X попадет в промежуток (0,5; 1).

Решение

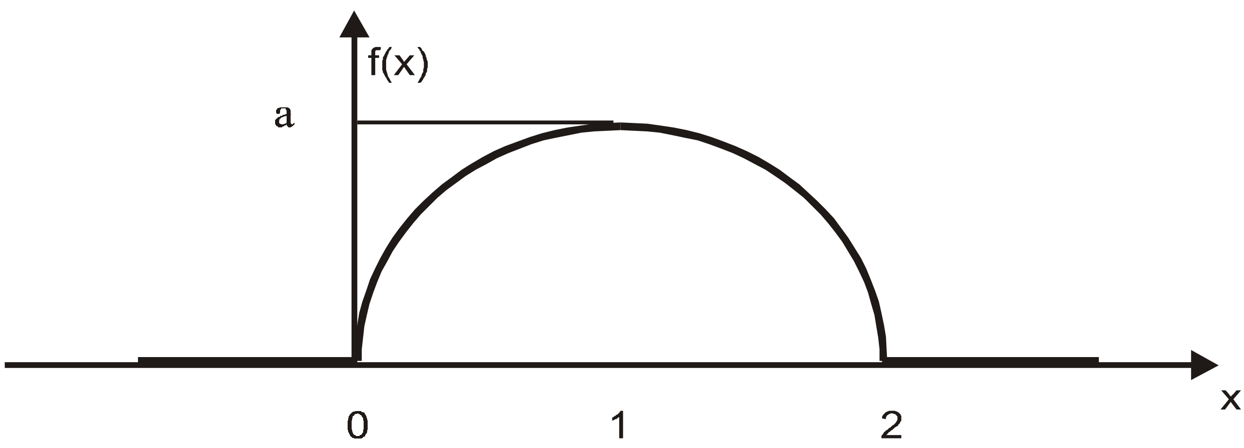
1. Согласно свойствам функции плотности вероятности f(x)

$$\int_0^2 a \cdot (2x - x^2)\, dx = 1.$$

Проводя интегрирование, получаем:

$$a\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = a \cdot \left(4 - \frac{8}{3}\right) = 1, \text{ откуда } a = 3/4.$$

2. График $y = f(x)$ имеет вид:



3. Вероятность попадания величины X на интервал (0, 5, 1) равна

$$P(0{,}5 < X < 1) = \int_{0,5}^{1} 3/4 \cdot (2x - x^2)\,dx = 3/4 \cdot (x^2 - x^3/3)\Bigg|_{0,5}^{1} = \frac{11}{32}.$$

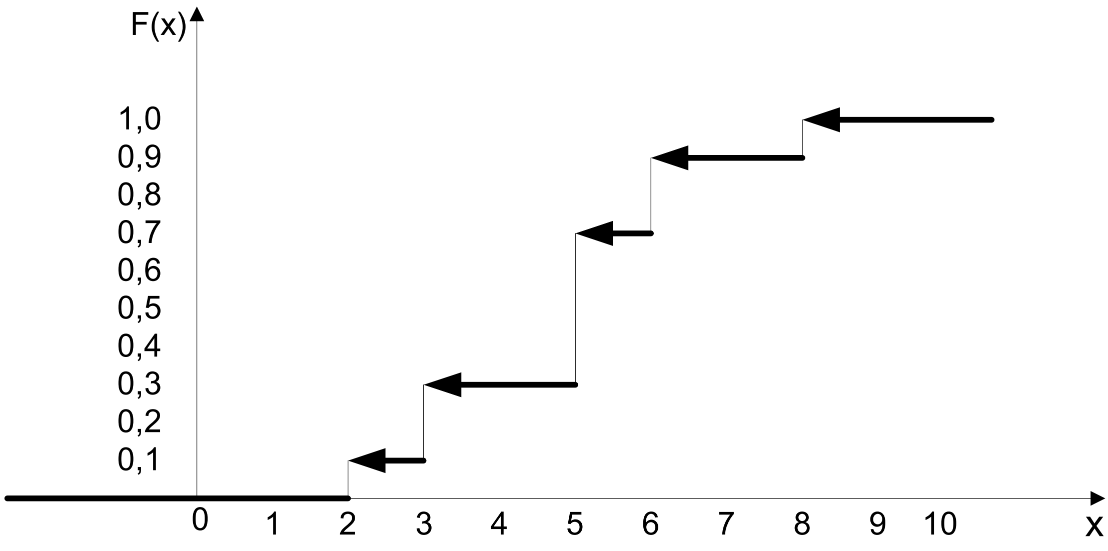
2. Дан ряд распределения дискретной случайной величины:

x_i	2	3	5	6	8
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Построить функцию распределения вероятности этой случайной величины X.

Решение

Если $x \le 2$, то $F(x) = P(X < x) = 0$.
Если $2 < x \le 3$, то $F(x) = P(X < x) = 0{,}1$.
Если $3 < x \le 5$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$.
Если $5 < x \le 6$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}7$.
Если $6 < x < 8$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}9$.



Если $x > 8$, то $F(x) = 0{,}9 + 0{,}1 = 1$.

2.3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

Функция распределения вероятности F(X) полностью характеризует случайную величину X. Однако получить в аналитическом виде такую характеристику случайной величины довольно сложно, да и не всегда это нужно. Между тем, для решения многих задач достаточно знать числовые характеристики случайной величины. К ним относятся: математическое ожидание, дисперсия, моменты, мода и медиана и т.д. Отметим главные из них.

Математическое ожидание M(X) случайной величины X можно считать центром распределения этой случайной величины.

Определение. Если X – дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, ..., x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$, то математическое ожидание M(X) определяется по формуле:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i. \qquad (2.3)$$

Определение. Пусть непрерывная случайная величина X имеет плотность вероятности f(x), тогда математическое ожидание M(X) непрерывной случайной величины X равна:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx. \qquad (2.4)$$

Дисперсия D(X) случайной величины X характеризует степень разброса значений этой величины около ее математического ожидания.

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X\text{-}M(X)]^2. \qquad (2.5)$$

Если ввести обозначение M(X) = m, то формула для вычисления дисперсии дискретной случайной величины X запишется в виде:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (x_i - m)^2. \qquad (2.6)$$

Для непрерывной случайной величины X дисперсия запишется в виде:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 \cdot f(x)\,dx\,. \qquad (2.7)$$

Примеры:

1. Случайная величина X характеризуется рядом распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Определить математическое ожидание и дисперсию.

Решение

Математическое ожидание:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 = 1{,}3.$$

Дисперсия:

$$D(X) = 0{,}2 \cdot (0-1{,}3)^2 + 0{,}4 \cdot (1-1{,}3)^2 + 0{,}3 \cdot (2-1{,}3)^2 + 0{,}1 \cdot (3-1{,}3)^2 = 0{,}8.$$

ЗАДАНИЕ 3

1. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = 1 - EXP(-x/T) \quad (x > 0,\ T - \text{константа})$$

Построить график функции плотности вероятности f(x) и вероятность попадания величины X на интервале (1, 2).

2. Случайная величина X задана функцией плотности вероятности f(x) = x/2 в интервале (0,2). Вне этого интервала f(x) = 0. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

3. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить функцию распределения случайной величины. Определить математическое ожидание и дисперсию величины X.

4. Случайная величина имеет равномерное распределение с плотностью распределения f(x) = 1/(b-a) при a < x < b, f(x) = 0, когда x вне этого интервала.

Построить функцию распределения этой величины и вероятность ее попадания на интервал (0,1).

2.4. Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью:

$$f(x) = \frac{1}{\text{ó}\sqrt{2\text{ð}}} \cdot \mathrm{EXP}[-\frac{(x-m)^2}{2\text{ó}^2}]. \qquad (2.8)$$

Математическое ожидание СВ с нормальным законом распределения M(X)= m, дисперсия D(X) = σ^2.

Кривая y = f(x) имеет вид, представленный на рисунке ниже.

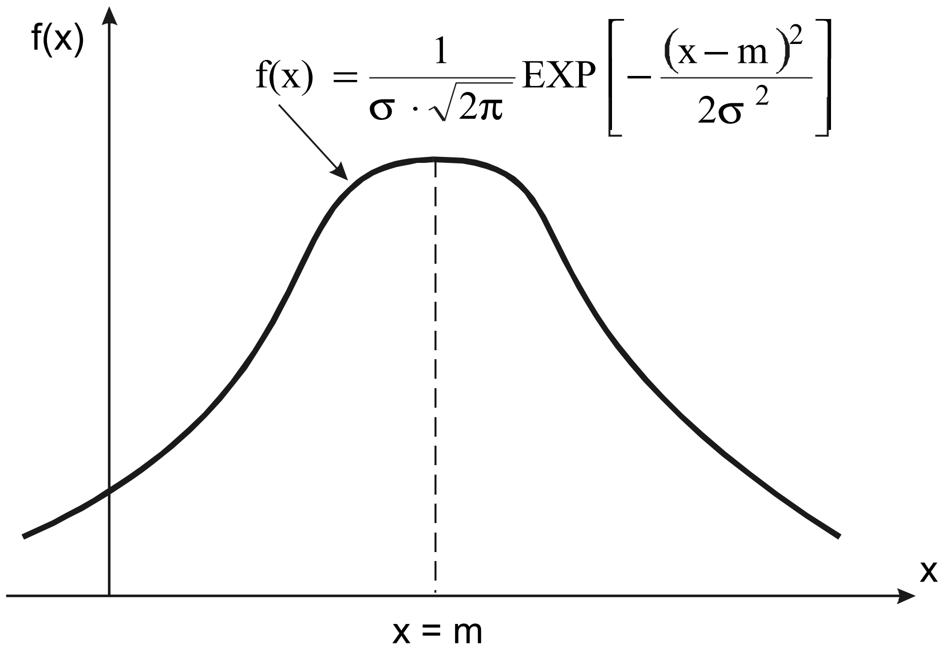


Рис. 5. Кривая распределения СВ с нормальным законом распределения

Введем обозначение функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x EXP(-t^2/2)\,dt, \qquad (2.9)$$

называемой функцией Лапласа (или интегралом вероятностей).

С помощью этой функции вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X на интервал (a, b) выражается простой формулой:

$$P(a < X < b) = \Phi[(b - m)/\sigma] - \Phi[(a - m)/\sigma]. \qquad (2.10)$$

Для вычисления функции Лапласа используются специальные таблицы.

В экономике и технике многие величины являются случайными величинами с нормальным законом распределения. Это объясняется тем, что эти величины образуются в результате суммирования многих случайных величин: $X = \sum X_i$ и согласно центральной предельной теореме имеют закон распределения, близкий к нормальному.

Теорема (центральная предельная теорема).

Каковы бы ни были законы распределения отдельных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, закон распределения их суммы $X = \sum X_i$ будет близок к нормальному при увеличении числа n слагаемых случайных величин.

Теорема Муавра-Лапласа.

Пусть проводится большое число N независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равно p. Тогда для оценки вероятности того, что событие А в этих N испытаниях появится не менее M и не более K раз, используется формула:

$$P(M < X < K) = \Phi\left[\frac{K - N\cdot p}{\sqrt{N\cdot p(1-p)}}\right] - \Phi\left[\frac{M - N\cdot p}{\sqrt{N\cdot p(1-p)}}\right]. \qquad (2.11)$$

Пример:

Вероятность выхода из строя детали во время испытаний p = 0,05. Какова вероятность, что при испытании N=100 деталей из строя выйдет от 5 до 10 деталей?

Решение

$$P(5 < X < 10) = \Phi[(10 - 100 \cdot 0{,}05)/(\sqrt{100 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95})] -$$
$$\Phi[(5 - 100 \cdot 0{,}05)/(\sqrt{100 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95})] = \Phi(5/\sqrt{4{,}75}) = \Phi(2{,}3) = 0{,}49$$

2.5. Закон больших чисел

При определении вероятности случайного события было отмечено, что при увеличении числа испытаний средний их результат становится устойчивым, при этом частота приближается к вероятности случайного события, а среднее арифметическое наблюдений за какой-либо случайной величиной X – к ее математическому ожиданию M(X).

Эти положения легли в основу закона больших чисел: при большом числе испытаний средний их результат перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности.

В аналитической форме закон больших чисел опирается на неравенство Чебышева: для любой случайной величины X, имеющей математическое ожидание M(X) и дисперсию D(X), справедливо неравенство:

$$P\{|X - M(X)| \geq \alpha\} \leq \frac{D(x)}{á^2}. \qquad (2.12)$$

Пользуясь неравенством Чебышева, оценим вероятность того, что случайная величина X будет отклонена от своего математического ожидания более чем на 3σ, где $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

В этом случае имеем:

$$P\{|X - M(X)| \geq 3 \cdot \sigma^2\} \leq \sigma^2/(3 \cdot \text{ б})^2 = 1/9. \qquad (2.13)$$

То есть для любой случайной величины X вероятность P ее попадания на расстояние от математического ожидания, большее чем "три сигмы", оказывается меньшим 1/9.

ЗАДАНИЕ 4

1. Случайная величина X имеет нормальный закон рас-

пределения, ее математическое ожидание $m = 10$, а дисперсия $D(X) = 1$. Найти вероятность попадания величины X на интервал (8, 12).

2. Вероятность поражения мишени при одном выстреле $p = 0{,}8$. Найти вероятность, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 75 до 85 раз.

3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность, что $P\{|X-M(X)| < 0{,}2\}$, если $D(X) = 0{,}01$.

4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	2	3
p	0,2	0,6	0,2

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность, что $|X - M(X)| < 0{,}2$.

РАЗДЕЛ 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

3.1. Основные задачи математической статистики

Математическая статистика занимается разработкой приемов статистических наблюдений и анализом статистических данных.

Основные задачи математической статистики:

1. Задача ставится так: в результате N независимых испытаний над случайной величиной X получены следующие ее значения:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Требуется определить, хотя бы и приближенно, неизвестную функцию распределения F(x) этой случайной величины.

2. Пусть из общих соображений известная функция распределения F(x) некоторой случайной величины. По результатам N независимых испытаний: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ требуется оценить

параметры этого распределения и точность этих оценок. Например, установить числовые значения математического ожидания и дисперсии этой случайной величины X.

3. Задача ставится так: на основании некоторых соображений выдвигается гипотеза о виде распределения или о параметрах распределения некоторой случайной величины. Спрашивается, совместимы ли результаты наблюдений x_1, x_2, …, x_n с выдвинутой гипотезой.

3.2. Выборка. Оценка параметров выборки

Пусть в результате N независимых испытаний получаем значения случайной величины X: x_1, x_2, … x_n – это выборка объема N из генеральной совокупности с рапределением F(x). Запишем эту последовательность в виде вариационного ряда:

$$x_1 \le x_2 \le \ldots x_n.$$

Построим эмпирическую функцию распределения F(x) :

$$F_n(x) = \begin{cases} O, \text{ при } x \le x_1 \\ \frac{k}{n}, \text{ при } x_к < x \le x_{к+1}, \\ 1, \text{ при } x > x_n \end{cases} \tag{3.1}$$

Тогда функция $F_n(x)$ – монотонна, непрерывна слева, имеет конечное число точек разрыва со скачками 1/n.

Согласно теореме Гливенко при увеличении числа независимых испытаний происходит сближение эмпирической функции распределения $F_n(x)$ с теоретической функцией распределения F(x).

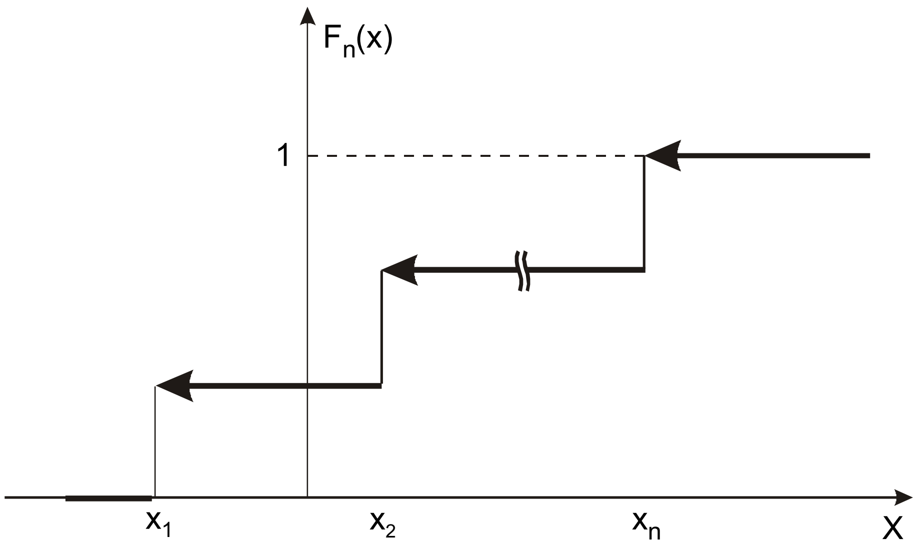


Рис. 6. Эмпирическая функция распределения $F_n(x)$

Естественной оценкой математического ожидания случайной величины X является:

$$M(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \qquad (3.2)$$

дисперсии: $$D(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2}{n-1}. \qquad (3.3)$$

3.3. Проверка статистических гипотез

Пусть требуется статистическая проверка гипотезы H о том, что данная выборка x_1, x_2, …, x_n извлечена из генеральной совокупности с функцией распределения F(x).

Выборку можно рассмотреть как точку n-мерного пространства, которое делится на две области:

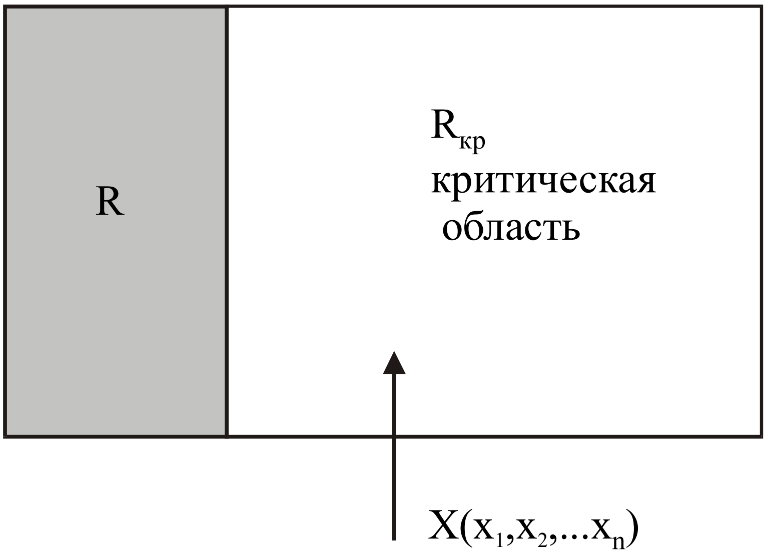


Рис. 7. Критическая область $R_{кр}$

Если точка с координатами (x_1, x_2, …, x_n) попадает в $R_{кр}$, то гипотеза отвергается.

Если же эта точка попадает в $R_{кр}$, то гипотеза принимается.

При этом возможны следующие ошибки:

1) ошибка первого рода – отвергнуть верную гипотезу;

2) ошибка второго рода – принять неверную гипотезу.

Критическая область $R_{кр}$ выбирается таким образом, чтобы минимизировать ошибки первого и второго рода.

3.4. Корреляционный анализ

Рассмотрим случай, при котором какие-то факторы X_1, X_2, …, X_n оказывают влияние на признак Y.

Например, количество выпавших осадков за сезон (X_1), средняя температура (X_2) оказывают влияние на урожай картофеля (Y) в конкретном хозяйстве.

Задача корреляционного анализа – установление степени влияния факторов на признак. Корреляционный анализ позволяет выявить неизвестные связи между факторами и признаком, установить факторы, оказывающие наибольшее влияние на изменение значений признака.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда фактор X влияет на признак Y.

По данным парных экспериментальных замеров получаем корреляционную таблицу :

X	x_1	x_2	x_3	………..	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	………..	y_n

Для количественной оценки тесноты связи между X и Y используют коэффициент корреляции:

$$R_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \qquad (3.4)$$

где: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$,

$$\sigma_x^{\,2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 , \quad \sigma_x^{\,2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 \qquad (3.5)$$

Коэффициент R_{xy} принимает значения от -1 до +1.

Принято считать, что если

$|R_{xy}| < 0,3$, то корреляционная связь слабая,

$|R_{xy}| = 0,3 \div 0,7$ - средняя,

$1 \geq |R_{xy}| > 0,7$, то корреляционная связь сильная.

При коэффициенте корреляции $R_{xy} > 0$ возрастание X приводит к росту и Y и, наоборот, уменьшение значений X приводит к снижению значений и Y.

И наоборот, если $R_{xy} < 0$, то изменение X в одну сторону приводит к противоположному изменению Y.

Если на признак Y действует несколько факторов, то рассматривают тесноту связи между изменениями всех факторов $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и изменениями Y.

3.5. Регрессионный анализ

Регрессионный анализ предназначен для представления влияния факторов X_1, X_2, …, X_n на признак Y в виде уравнения регрессии:

$$У = f(x_1, x_2, ..., x_n). \quad (3.6)$$

В случае парной корреляции, т.е. влияния одного фактора X на признак Y, уравнение регрессии выбирают в виде:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x, \text{ или}$$
$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2, \text{ или} \quad (3.7)$$
$$y = a_0 \cdot EXP(a_1 \cdot x).$$

В случае множественной линейной регрессии в качестве модели выбирают уравнение вида:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n. \quad (3.8)$$

Для определения неизвестных коэффициентов a_0 или a_1 применяют метод наименьших квадратов (МНК).

Согласно этому методу коэффициенты a_0 и a_1 должны быть выбраны такими, чтобы обеспечить наименьшее значение сумме квадратов отклонений теоретических значений уравнения регрессии от ее экспериментальных значений, выбранных из корреляционной таблицы. То есть требуется выполнение условия:

$$\sum_{i=1}^{n}[f(x_i, a_0, a_1) - y_i]^2 = \min. \quad (3.9)$$

Графически отклонения теоретических значений признака от его замеров можно представить следующим образом (рис. 8).

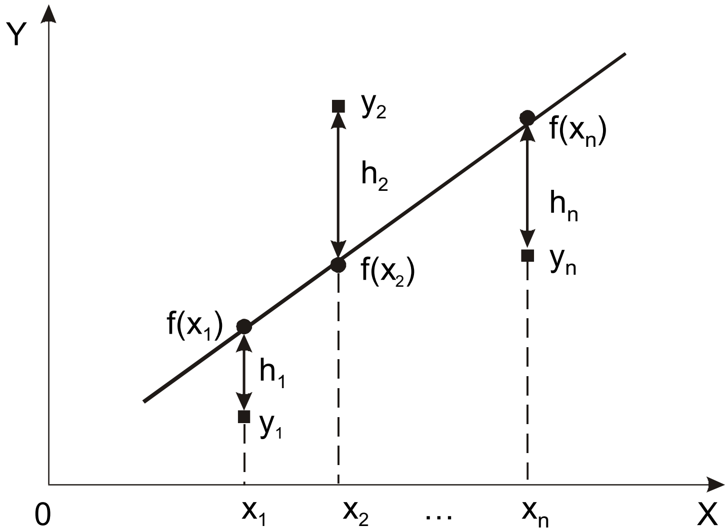


Рис. 8. Геометрическая интерпретация МНК

Согласно МНК требуется, чтобы

$$h_1^2 + h_2^2 + ... + h_n^2 = \min. \qquad (3.10)$$

На примере регрессионного уравнения $y = a_0 + a_1 \cdot x$ рассмотрим применение МНК для определения неизвестных коэффициентов a_0 и a_1.

Запишем функционал:

$$F(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i)^2 = \min. \qquad (3.11)$$

Для определения минимального значения функционала $F(a_0, a_1)$ необходимо приравнять его частные производные по переменным a_0 и a_1 нулю.

В результате получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i) \cdot 1 = 0$$

$$(3.12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i) \cdot x_i = 0$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_0 и a_1:

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \tag{3.13}$$

Пример:

Выработка бригады (Y) зависит от ее численности (X) согласно следующей таблице:

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	5	11	14	21	24	31	34	41

Определить коэффициент корреляции R_{xy} между этими случайными величинами и построить линейное уравнение регрессии.

Решение

По формулам параграфа (3.4) находим:

$$\bar{x} = 4{,}5;\ \bar{y} = 22{,}6;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x \cdot y/n = 128;\ \bar{x} \cdot \bar{y} = 101{,}7;$$

$$\sigma_x = 2{,}45;\ \sigma_y = 12{,}3.$$

Окончательно, $R_{xy} = \dfrac{128 - 101{,}7}{2{,}45 \cdot 12{,}3} = 0{,}88.$

Далее для определения коэффициентов a_0 и a_1 в выбранном линейном регрессионном уравнении:

$$y = a_o + a_1 \cdot x$$

воспользуемся формулами параграфа 3.5.

В результате получаем:

$$\begin{cases} 8 \cdot a_0 + 36 \cdot a_1 = 181 \\ 36 \cdot a_0 + 204 \cdot a_1 = 1024. \end{cases}$$

В результате решения этого уравнения получаем $a_0 = 0$, $a_1 = 5$. Таким образом, регрессионное уравнение примет вид:

$$y = 5 \cdot x.$$

ЗАДАНИЕ 5

1. Определить коэффициент корреляции и построить уравнение регрессии между случайными величинами X и Y, заданных таблицей:

x	2	4	6	8	10	12
y	4	7	13	15	19	25

2. Построить систему линейных уравнений для определения МНК коэффициентов a_0 и a_1 при выборе регрессионного уравнения в виде: $y = a_0 + a_1 \cdot x^2$.

3.6. Временные ряды

Временные (динамические) ряды представляют собой числовые данные, характеризующие исследуемые процессы и явления. В зависимости от порядка их регистрации ряды динамики являются дискретными или непрерывными.

Дискретные ряды получаются путем регистрации данных через определенные промежутки времени – через месяц, год и т.д.

Непрерывные ряды динамики получаются в случае непрерывной записи изменения явления.

На практике чаще всего встречаются дискретные представления исследуемых процессов. В этом случае ряд динамики можно представить в виде

Уровень ряда	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Время	t_1	t_2	t_3	…	t_n

При анализе временных рядов пользуются статистическими показателями, определяющими характер и интенсивность количественных изменений явлений. К этим показателям относятся: уровень ряда, средний уровень, абсолютный прирост, темпы роста и прироста, автоковариация и автокорреляция.

Уровнем ряда (x_i) является каждый член ряда динамики. Различают начальный (x_0), конечный (x_n) и средний ($x_{ср}$) уровни ряда. Уровень ряда, относительно которого предполагается рассматривать изменение процесса, выбирается в качестве базисного ($x_б$).

Абсолютный прирост ($d_{i\,б}$, d_i) характеризует размер изменения исследуемого явления во времени и определяется разностью двух уровней. Абсолютные приросты могут быть базисными и цепными:

$$d_{i\,б} = x_i - x_б,\ d_i = x_i - x_{i-1},$$

где x_i – уровень ряда в период i, $x_б$ – уровень ряда в базисный период.

Темпом роста ($k_{i\,б}$, k_i) является отношение двух уровней ряда динамики, выраженное в процентах. Различают базисные и цепные темпы роста:

$$K_{iб} = \frac{x_1}{x_б} \cdot 100\%; \qquad K_i = \frac{x_i}{x_{i-1}} \cdot 100\%. \qquad (3.15)$$

Темпом прироста ($T_{iб}$, T_i) называется отношение абсолютного прироста к базисному или предыдущему уровню, выраженное в процентах:

$$T_{iб} = \frac{d_{iб}}{x_б} \cdot 100\%; \qquad T_i = \frac{d_i}{x_{i-1}} \cdot 100\%. \qquad (3.16)$$

Темпы роста и прироста связаны следующим образом:

$$K_i = T_i + 100. \qquad (3.17)$$

Исследование рядов динамики в целях анализа и прогнозирования является довольно сложной проблемой, решение которой требует применения различных методов обработки и статистического анализа.

При статистическом подходе к исследованию и моделированию явлений особое место занимает корреляционный и регрессивный анализ. Применение корреляционного и регрессионного анализа требует соблюдения ряда известных условий этих методов.

Основной предпосылкой можно считать то, что изучаемая совокупность должна быть случайной выборкой из бесконечной генеральной совокупности, в этом случае анализ временных рядов принципиально ничем не отличается от анализа данных случайной выборки.

Кроме того, требуется выполнение условий независимости, случайности и нормального распределения данных наблюдений.

Следует отметить, что в результате корреляционного анализа рядов динамики, имеющих вполне определенные тенденции развития, получаются завышенные значения показателей корреляции (проблема ложной корреляции). Это объясняется тем, что в результате анализа сопоставляются не случайные колебания, а статистические совокупности особого рода – реализация детерминированных частей и случайных процессов.

Для исследования временных рядов и выявления причин их вариации вокруг определенного уровня используются методы теории случайных процессов.

При анализе временных рядов исходят из расчленения динамики процесса на три составляющие, которые связаны между собой аддитивно:

1) Тенденция (тренд) $x_{тр}(t)$, представляющая собой долговременное направление развития процесса.

2) Систематические периодические колебания $g(t)$, связанные с влиянием сезонности или цикличности развития процесса.

3) Случайная составляющая $z(t)$, которая является результатом влияния на динамику процесса случайных факторов.

Следует отметить, что не всегда ряды динамики состоят из всех рассмотренных компонент. Единственной составляющей, которая всегда встречается в рядах, является случайная составляющая $z(t)$, но и она может быть только в сочетании с одним или обоими составляющими.

В результате ряд динамики представим в виде:

$$x(t) = x_{тр}(t) + g(t) + z(t). \qquad (3.18)$$

Геометрическая интерпретация модели (3.18) ряда динамики представлена ниже.

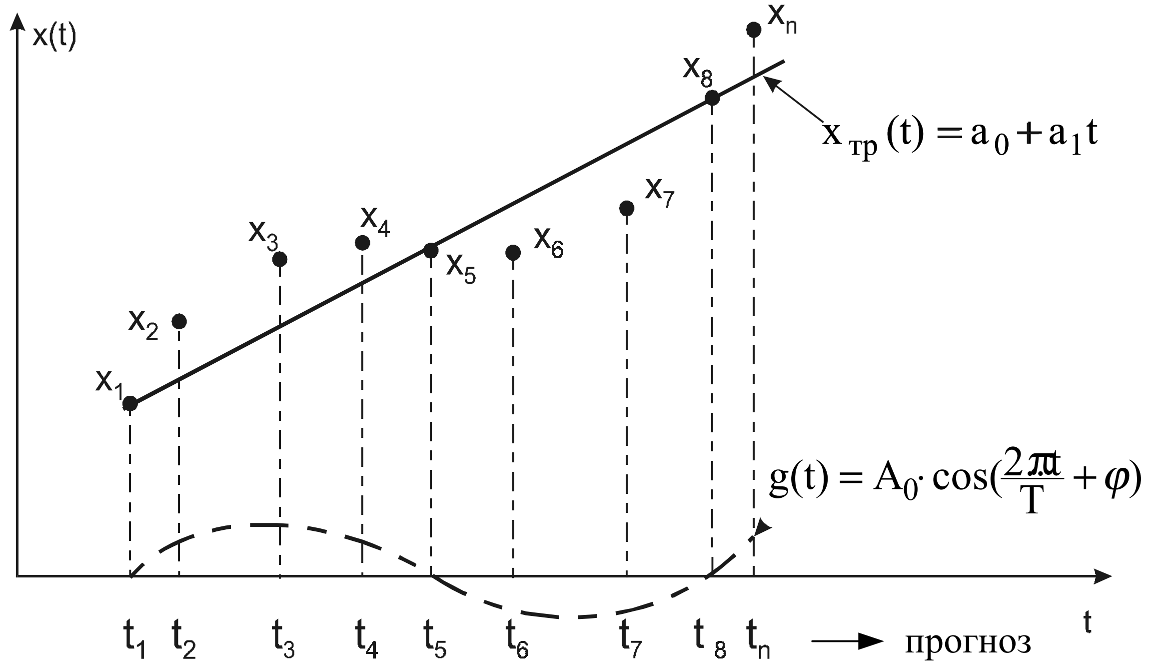


Рис. 9. Временной ряд $x_i = x(t_i)$ и его составляющие

Процедуру статистического анализа рядов динамики целесообразно подразделять на три компоненты:

1-я стадия – определение характеристик исследуемых рядов и их разложение на три составляющие;

2-я стадия – всесторонний анализ отдельных составляющих и разработка модели процесса;

3-я стадия – прогнозирование исследуемого ряда динамики на основе полученной модели.

1. Анализ тренда.

Важнейшей задачей анализа временных рядов является определение основной закономерности изменения изучаемого явления во времени. Обычно считают, что основная тенденция (тренд) есть результат влияния комплекса причин, действующих постоянно на изучаемый процесс в течение длительного периода, т.е. она характеризуется детерминированной составляющей временного ряда.

Для решения этой задачи применяются различные методы сглаживания, наиболее известным из которых является метод наименьших квадратов. Согласно МНК в качестве тренда выбирается кривая y = f(t), сумма квадратов расстояния от точек которой до уровней ряда x_i (i = 1, 2 … n) является минимальной.

Основной проблемой при определении тенденции с помощью МНК является выбор формы кривой f(t). Обычно для решения этой задачи анализируется набор статистических данных или анализируется сам процесс.

2. Исследование периодических колебаний.

Во временных рядах динамики наряду с основными долговременными тенденциями иногда проявляется более или менее регулярные колебания, связанные с цикличностью или сезонностью развития явления.

Для определения периодических колебаний следует прибегать к гармоническому анализу, в котором анализ рядов динамики производится при помощи линейных комбинаций функции времени – синусов и косинусов, причем коэффициенты линейных комбинаций рассматриваются как неизвестные параметры.

Как известно, любой ряд динамики можно с помощью преобразований Фурье представить суммой определенного числа гармоник. Но задача гармонического анализа состоит в определении только основных гармоник, содержащих главные закономерности развития процесса.

Общую задачу гармонического анализа – выявление периодичности процесса – можно сформулировать следующим образом. Допустим, что на конечном интервале (-L, L) задана функция x(t). Выдвигают гипотезу о том, что функция x(t) содержит периодическую компоненту g(t), так что

$$x(t) = g(t) + z(t), \tag{3.19}$$

где z(t) – случайная функция с нормальным распределением.

Задача, по существу, сводится к аппроксимации процесса x(t) процессом y(t) определенным соотношением:

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{n}[A_k \cdot \cos(\omega_k t) + B_k \cdot \sin(\omega_k t)], \quad (3.20)$$

где неизвестные параметры A_k, B_k и ω_k определяются методом наименьших квадратов, минимизирующим функцию

$$\sum[x(t) - y(t)]^2 \to \min. \quad (3.21)$$

В результате получаем следующие оценки параметров:

$$A_0 = \frac{1}{2L} \cdot \int_{-L}^{L} x(t)\,dt, \; A_k = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} x(t) \cdot \cos(2\pi kt/T)\,dt \quad (3.22)$$

$$B_k = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} x(t) \cdot \sin(2\pi kt/T)\,dt$$

Введем амплитуду k-ой гармоники: $R_k = \sqrt{(A_k^2 + B_k^2)}$

Тогда вклад каждой гармоники равен:

– для нулевой и n-ой соответственно R_0^2 и R_n^2,

– для k-й – $2R_k^2$.

3. Анализ случайного компонента.

Случайный компонент является ненаблюдаемым, и его оценку можно получить только косвенно, определив перед этим параметры тенденции и периодических колебаний.

При анализе случайного компонента можно ставить различные цели:

а) проверку соблюдения предпосылок, лежащих в основе применения методов определения оценок параметров тенденций и периодических колебаний (в основном предпосылок МНК):

б) статистический анализ случайного компонента при помощи теории случайных процессов;

в) получение таких остаточных членов, которые можно использовать для многомерного статистического анализа.

РАЗДЕЛ 4. ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

4.1. Введение в теорию исследования операций

Характерной особенностью организационно-экономической системы является наличие цели – достижение какого-либо экономического результата.

Операцией называется совокупность действий, направленных на достижение этой цели.

Наличие цели в операции подразумевает существование активных участников, которые и занимаются реализацией этой цели. Оперирующей стороной называется совокупность лиц, которые стремятся в данной операции к поставленной цели.

В любой операции для достижения цели оперирующая сторона должна иметь некоторый запас ресурсов (например, сырье, оборудование, финансовые средства, рабочую силу и т.д.). Этот элемент называют активными средствами и обозначают вектором **a**.

Способы использования активных средств для достижения цели называют стратегией и обозначают переменной x (она может быть скалярной величиной, вектором или функцией). К стратегиям можно отнести выбор источника финансирования проекта, распределение рабочей силы и сырья между предприятиями). Стратегии контролируются оперирующей стороной, т.е. выбираются ею по своему усмотрению с учетом более эффективного решения поставленной цели.

Кроме них существуют неконтролируемые факторы, влияющие на ход операции и которыми оперирующая сторона не распоряжается (например, природные условия). Неконтролируемые факторы будем обозначать переменной y.

Степень соответствия хода операции поставленной цели определяется критерием эффективности W. Критерий эффективности представляет собой некоторую функцию, зависящую главным образом от стратегий x и неконтролируемых факторов y:

$$W = F(x, y). \qquad (4.1)$$

В общем случае стратегии и неконтролируемые факторы являются функциями времени.

Тогда достижение цели операции эквивалентно требованию минимизации или максимизации критерия эффективности (например, максимизация прибыли предприятия, минимизация затрат ресурсов и т.д.).

Классификация задач исследования операций проводится по двум признакам: 1) по видам неконтролируемых факторов, 2) по видам критерия эффективности и пространствам стратегий.

Наиболее простую группу задач исследования операций составляют задачи, в которых неконтролируемые факторы отсутствуют или имеются только фиксированные неконтролируемые факторы. Задачи этого класса называются задачами математического программирования.

Внутренняя классификация в разделе математического программирования связана уже с видом критерия эффективности и пространства стратегий.

Если критерий эффективности представляет собой линейную функцию от переменных, описывающих стратегию, а пространство стратегий задается системой линейных неравенств, задающих многогранник решений, то получаем задачу линейного программирования.

Если критерии эффективности или ограничения, задающие пространство стратегий, являются нелинейными функциями, то имеем задачу нелинейного программирования.

Если в задаче математического программирования имеется переменная времени, а критерий эффективности входит в уравнения, описывающие развитие процесса операции во времени, то такая задача относится к динамическому программированию.

При наличии неконтролируемых факторов наиболее важными являются задачи, в которых неопределенность связана с действиями других участников операции, преследующих свои цели. Раздел исследования операций, занимающийся изучением подобных задач, называется теорией игр.

Также значительный интерес среди задач с неконтролируемыми факторами представляют задачи теории массового обслуживания, задачи теории надежности и задачи управления запасами.

4.2. Теория массового обслуживания

Системой массового обслуживания (СМО) называется любая система, предназначенная для обслуживания каких-либо заявок (требований), поступающих на нее в случайные моменты времени. Примерами СМО могут служить: телефонная станция, бюро ремонта, билетная касса, ЭВМ.

Тория массового обслуживания занимается изучением случайных процессов, протекающих в СМО.

Любое устройство, непосредственно занимающееся обслуживанием заявок, называется каналом обслуживания.

СМО делятся на одноканальные и многоканальные.

Различают СМО с отказами, когда заявка, пришедшая в момент, когда каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем в его работе не участвует.

Различают СМО с очередью, когда заявка, пришедшая в момент занятости канала, становится в очередь и ждет, когда один из каналов освободится. Число мест в очереди m может быть ограниченным или неограниченным. При $m = 0$ СМО с очередью превращается в СМО с отказами.

Очередь может быть ограниченной не только по количеству стоящих в ней заявок (длина очереди), но и по времени ожидания – «СМО с нетерпеливыми клиентами».

СМО с очередью различаются по дисциплине обслуживания:

1) Заявки обслуживаются в порядке поступления.
2) Некоторые заявки обслуживаются вне очереди – «СМО с приоритетом».

Аналитически СМО наиболее легко исследовать, если все потоки событий, переводящие ее из одного состояния в другое, – простейшие (стационарные пуассоновские). Это значит, что: 1) интенсивность потока становится постоянной (свойство стационарности), 2) каждое событие появляется независимо от того, что и когда произошло до него (свойство отсутствия последствия), 3) вероятность попадания на малый интервал времени двух и более заявок пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания на него одной заявки (свойство ординарности).

В этом случае интервалы времени между событиями в потоках имеют показательное распределение с интенсивностью потока q.

Поток обслуживания заявок является простейшим, если время обслуживания заявки T – случайная величина, имеющая показательное распределение. Параметр этого обслуживания $z = 1/\ t_{ср.}$, где $t_{ср.}$ – среднее время обслуживания клиента.

При выполнении некоторых условий для простейших потоков существует финальный стационарный режим, при котором характеристики процесса не зависят от времени.

Рассмотрим две основные задачи ТМО.

1. Многоканальная СМО с отказами (задача Эрланга).

Задача Эрланга описывает поведение СМО с отказами (в случае, когда все каналы заняты, клиент выходит из СМО).

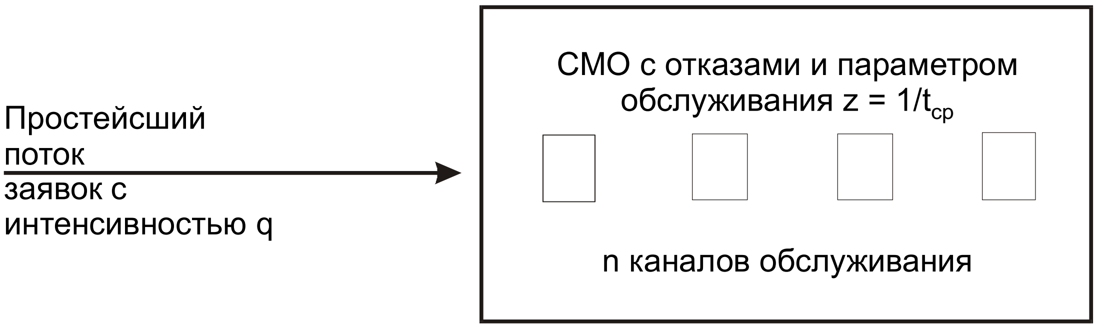


Рис. 10. Задача Эрланга

Состояния СМО:

1) S_0 – СМО свободна;

2) S_1 – занят только 1 канал;

………..

к) S_k – занято k каналов, (n-k) каналов свободны;

………..

n) S_n – заняты все n каналов.

В стационарном режиме финальные вероятности определяются формулой

$$p_0 = \frac{1}{1+\frac{r}{1!}+\frac{r^2}{2!}+...+\frac{r^n}{n!}}, \qquad (4.2)$$

$$p_k = p_0 \cdot \frac{r^k}{k!} \ (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $r = q/z$.

<u>Характеристики эффективности СМО</u>

1) Среднее число заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени

$$N = q\,(1 - p_n). \qquad (4.3)$$

2) Вероятность обслуживания поступившей заявки

$$Q = A\,/q. \qquad (4.4)$$

3) Вероятность отказа поступившей заявки

$$p_{отк} = p_n. \qquad (4.5)$$

4) Среднее число занятых каналов

$$K = r \cdot (1 - p_n). \qquad (4.6)$$

<u>Пример:</u>

В гараже – ремонтная база с четырьмя боксами. На нее обращается примерно 2 машины в день. Среднее время обслуживания $t_{ср}$ = 1 день. В случае, когда все боксы заняты, вновь прибывшая машина покидает гараж. Найти финальные вероятности системы и ее характеристики.

Решение

В нашем случае $q = 2$, $z = 1/t_{ср} = 1$, $r = q/z = 2$.

Тогда $p_0 = \dfrac{1}{1+\frac{2}{1!}+\frac{4}{2!}+\frac{8}{3!}+\frac{16}{4!}} \approx 0{,}14$;

$$p_1 = p_0\frac{2}{1} = 0{,}28; \qquad p_2 = p_0\frac{2^2}{2!} = 0{,}28;$$

$$p_3 = p_0\frac{2^3}{3!} = 0{,}18; \qquad p_4 = p_0\frac{2^4}{4!} = 0{,}1.$$

Среднее число заявок А, обслуживаемых СМО в день,

$$A = q\,(1 - p_4) = 2(1 - 0{,}1) = 1{,}8.$$

Вероятность обслуживания заявки

$$Q = 1 - p_4 = 0{,}9.$$

Вероятность отказа поступившей заявки

$$p_{отк} = p_4 = 0{,}1.$$

Среднее число занятых заявок

$$K = r\,(1 - p_4) = 2(1 - 0{,}1) = 1{,}8.$$

За месяц отказов

$$q \cdot N \cdot p_{отк} = 2 \cdot 30 \cdot 0{,}1 = 6 \text{ отказов/ месяц.}$$

2. Многоканальная СМО с ограничением по длине очереди.

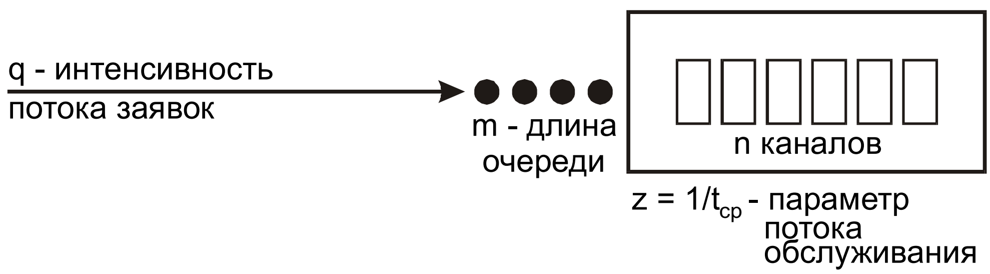


Рис. 11. СМО с ограничением по длине очереди

Состояния системы:

S_0 – СМО свободна;

S_1 – занят 1 канал, очереди нет;

………..

S_n – заняты все n каналов, очереди нет;

………..

S_{n+m} – заняты все n каналов, очередь длиной m полностью занята.

Финальные вероятности:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \ldots + \frac{r^n}{n!} + \frac{r^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - x^m}{1 - x}}, \qquad (4.7)$$

где r = q/z, x = r/n;

$$p_k = \frac{r^k}{k!} \cdot p_0 \quad (1 \le k \le n), \qquad p_{n+s} = \frac{r^{n+s}}{n^s \cdot n!} \cdot p_0 \quad (1 \le s \le m).$$

Характеристики системы

1) Среднее число заявок А, обслуживаемых в СМО в единицу времени,

$$A = q \cdot (1 - p_{n+m}). \qquad (4.8)$$

2) Вероятность обслуживания заявки

$$Q = 1 - p_{n+m}. \qquad (4.9)$$

3) Вероятность отказа

$$P_{отк} = p_{n+m}. \qquad (4.10)$$

4) Среднее число занятых каналов

$$K = r\,(1 - p_{n+m}). \qquad (4.11)$$

Задача.

В стоматологическом кабинете работают два врача. В холле 3 кресла для ожидания. Поток посетителей – 4 человека в час, среднее время обслуживания больного – 0,5 часа на одного больного. Найти количество больных, которые не были обслужены в стоматологическом кабинете потому, что все места в холле на момент их прибытия были заняты.

4.3. Введение в теорию игр

В качестве неконтролируемых факторов могут выступать другие активные участники операции. В этом случае можно сделать предположения об их принципах поведения. Ситуация, в которых сталкиваются интересы нескольких участников, принято называть конфликтной.

Конфликт – операция, в которой участвуют несколько сторон, преследующих свои интересы и обладающих определенными возможностями действия.

Теория игр – раздел теории исследования операций, занимающийся математическими моделями принятия оптимальных решений в условиях конфликтов.

Участники игры – игроки.

В антагонистических играх игроки действуют друг против друга.

В некоторых играх игроки объединяются в коалиции действия. В ряде задач выделяют коалиции интересов.

Если в игре коалиции вообще недопустимы, то игра называется бескоалиционной.

Численная оценка каждого исхода игры, т.е. критерий эффективности, называется в теории игр функцией выигрыша.

Тройка $\Gamma = \langle X, Y, H \rangle$, где X и Y – множества, H – функция от двух переменных x и y называется антагонистической игрой.

Если множества X и Y конечны, то тройка $\Gamma = \langle X, Y, H \rangle$ называется конечной антагонистической игрой. Множества X и Y называются множествами стратегий, а их элементы x и y – чистыми стратегиями игрока 1 и 2 соответственно.

Функция $H = H(x, y)$ – функция выигрыша игрока 1 в ситуации (x, y), когда первый игрок выбирает стратегию x, второй игрок выбирает стратегию y. В этом случае пара (x, y) – образует ситуацию в чистых стратегиях.

Процесс разыгрывания конечной антагонистической игры состоит в том, что игроки 1 и 2 независимо друг от друга выбирают соответственно некоторым чистым стратегиям x и y, в результате чего складывается ситуация (x, y). После чего игрок 1 получает выигрыш H(x, y), игрок 2 столько же проигрывает. Поэтому величину H(x, y) называют также проигрышем игрока 2. Понятие выигрыша и проигрыша чисто условны, так как величина H(x, y) может быть отрицательной.

Считая, в силу антагонистичности игры Г, выигрыш игрока 2 равным величине его проигрыша с обратным знаком, функцию -H(x, y) называют функцией выигрыша игрока 2.

Поскольку число возможных действий каждого из игроков конечно, то значения функции H естественно представить в виде матрицы с элементами H(i, j), в i-ой строке которой последовательно расположены выигрыши игрока i в ситуациях (i, 1), (i, 2), …, (i, n), а в столбце j – его выигрыши в ситуациях (1, j), (2, j), …, (m, j).

Таким образом, всякую конечную антагонистическую игру можно задать вещественной матрицей, которая называется матрицей выигрыша. В этой терминологии конечная антагонистическая игра называется матричной, выбор игроком 1 стратегии i означает выбор строки i, а выбор игроком 2 стратегии j – выбор столбца j. Выигрыш игрока i будет при этом равен элементу матрицы H, стоящему на пересечении i-ой строки и j-го столбца.

Если игрок 1 выбирает стратегию x* из X, то игрок 2 может выбрать такую стратегию y из Y, при которой выигрыш игрока 1 будет равен наименьшему из чисел H(x*, y) при различных y из Y. Поэтому игрок 1 будет склонен выбрать свою стратегию x* так, чтобы этот минимальный выигрыш был наибольшим, т.е. равным

$$\max_{x} \min_{y} H(x, y) = v(\Gamma). \tag{4.12}$$

Величину v(Г) будем называть нижним значением игры Г = ‹X, Y, H›. Такую стратегию игрока 1 называют его максимальной чистой стратегией. Применяя эту стратегию, игрок 1 при любом поведении игрока 2 обеспечивает себе выигрыш, не меньший, чем v(Г).

Это можно записать в виде неравенства:

$$H(x^*, y) \geq v(\Gamma) \text{ для любого } y \text{ их } Y. \tag{4.13}$$

Аналогично стратегия y*, определяемая из равенства

$$\max_{x} \min_{y} H(x, y) = w(\Gamma), \tag{4.14}$$

называется минимаксной чистой стратегией игрока 2.

Применяя ее, он при любых действиях игрока 1 проигрывает ему не больше w(Г), что соответствует неравенству

$$H(x, y^*) \le w(\Gamma) \text{ для любого } x \text{ из } X. \qquad (4.15)$$

Величина w(Г) – верхнее значение игры Г = ‹X, Y, H›.

Для любых x и y из X и Y соответственно имеем:

$$v(\Gamma) \le H(x, y) \le w(\Gamma). \qquad (4.16)$$

Придерживаясь стратегии x*, игрок 1 поступает очень осторожно: он желает получить величину v(Г) независимо от действия игрока 2. Принцип, по которому он следует, называется принцип максимина. При этом гарантированный выигрыш игрока 1 как раз равен величине

$$\max \min H(x, y). \qquad (4.17)$$

При этом проигрыш второго игрока 2 не превосходит W(Г) при любых действиях игрока 1.

Принцип максимина был впервые сформулирован Дж. фон Нейманом в 1928 году. Это принцип широко используется в теории игр.

Ситуация, когда v(Г) = w(Г) при некоторой стратегии (x*, y*) обоих игроков, называется ситуацией равновесия в чистых стратегиях.

Для нахождения ситуации равновесия (седловых точек) вначале определяют минимумы элементов матрицы выигрышей $H = \|h_{ij}\|$ по строкам: $\min h_{ij}$, $\min h_{2j}$, …, $\min h_{mj}$, а затем среди этих элементов выбирается максимальный $\max \min h_{ij}$.

Общее значение максимина и минимакса будем называть матричной игрой с матрицей выигрышей H.

Если ситуация равновесия в чистых стратегиях отсутствует, то игрок может ввести случайную величину на множестве чистых стратегий, т.е. функцию на этом множестве. Это будет вещественная функция X = X(x), для которой X(x) ≥ 0 и $\sum X(x) = 1$. Такие стратегии называются смешанными.

Теорема.

В смешанных стратегиях любая матричная игра имеет ситуацию равновесия. В результате каждый игрок имеет хотя бы одну оптимальную стратегию, а множество всех ситуаций равновесия является прямым произведением множества оптимальных стратегий первого игрока и множества оптимальных стратегий второго игрока. Множество оптимальных стратегий первого игрока равно множеству его максиминных стратегий, а множество оптимальных стратегий второго игрока – множеству его минимаксных стратегий в игре Г. Выигрыши во всех ситуациях равновесия одинаковы и равны значению игры.

Пример:

Фирма планирует выпуск трех видов изделий в количестве X, Y, Z общим числом N.

Себестоимость каждого изделия примерно одинаковая и равна a. В зависимости от ситуации на рынке рентабельность по каждому виду продукции равна:

Ситуация на рынке	Рентабельность по каждому виду продукции		
	X	Y	Z
1-я ситуация	x_1	y_1	z_1
2-я ситуация	x_2	y_2	z_2
3-я ситуация	x_3	y_3	z_3

Определить такое количество каждого из изделий X, Y, Z, которое способно обеспечить обеспеченную прибыль независимо от ситуации на рынке.

Решение

Оптимальную стратегию (X*, Y*, Z*) определяем в результате решения неравенств

$$a\cdot(x_i\cdot X + y_i\cdot Y + z_i\cdot Z) \geq U \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (4.18)$$
$$X + Y + Z = N,$$

где U – цена игры, a себестоимость единицы любого изделия. Очевидно, что фирма, выбрав выпуск изделий в количества X, Y, Z, получит при любой ситуации на рынке прибыль не менее U. Решение неравенств (4.18) позволяет определить оптимальную стратегию:

$$X^* = \frac{w_1\cdot v_2 - w_2\cdot u_2}{u_1\cdot v_2 - u_2\cdot v_1}, \quad Y^* = \frac{w_1\cdot v_1 - w_2\cdot u_1}{u_2\cdot v_1 - u_1\cdot v_2}, \quad Z^* = N - X^* - Y^*,$$

где $u_1 = x_1 + z_3 - z_1 - x_3$, $u_2 = y_1 + z_3 - z_1 - y_3$,

$v_1 = x_2 + z_3 - z_2 - x_3$, $\qquad v_2 = y_2 + z_3 - z_2 - y_3$,

$w_1 = N \cdot (z_3 - z_1)$, $\qquad w_2 = N \cdot (z_3 - z_2)$.

Тогда обеспеченная прибыль от реализации изделий равна:

$$U^* = (x_i \cdot X^* + y_i \cdot Y^* + z_i \cdot Z^*) \cdot a.$$

Для любого $i = 1, 2, 3$.

Пусть планируется выпуск $N = 10000$ изделий трех видов в количестве X, Y и Z соответственно. Рентабельность по каждому виду в зависимости от ситуации на рынке равна $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 0{,}2$; $x_3 = 0{,}3$; $y_4 = 0{,}2$; $y_3 = 0{,}1$; $z_1 = 0{,}3$; $z_2 = 0{,}1$; $z_3 = 0{,}2$. В результате решения системы (4.18) получаем, что оптимальная стратегия соответствует следующим значениям: $X^* = 3333$; $Y^* = 5000$; $Z^* = 1667$ изделиям.

Гарантированная прибыль при любой ситуации на рынке равна: $U = 1833 \cdot a$ (ден. един.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения.– М.: Наука, 1988. - 480 с.

2. Браунли К.А. Статистическая теория и методология в науке и технике. – М.: Наука, 1977. - 408 с.

3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Физматгиз, 1988. - 406 с.

4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. –М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.

5. Горелик В.А., Ушаков И.А. Исследование операций. – М.: Машиностроение, 1986. – 288 с.