Задача 1. Построить схематический график функции с помощью производной первого порядка.

Дано: $y = x^2(x-2)^2$.

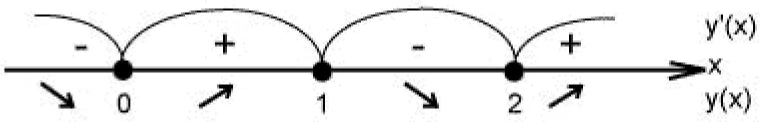
Решение.

1) $D(y) = (-\infty;+\infty)$.

2) Функция ни четная, ни нечетная.

3) $y' = 2x(x-2)^2 + 2x^2(x-2) = 4x(x-2)(x-1)$.

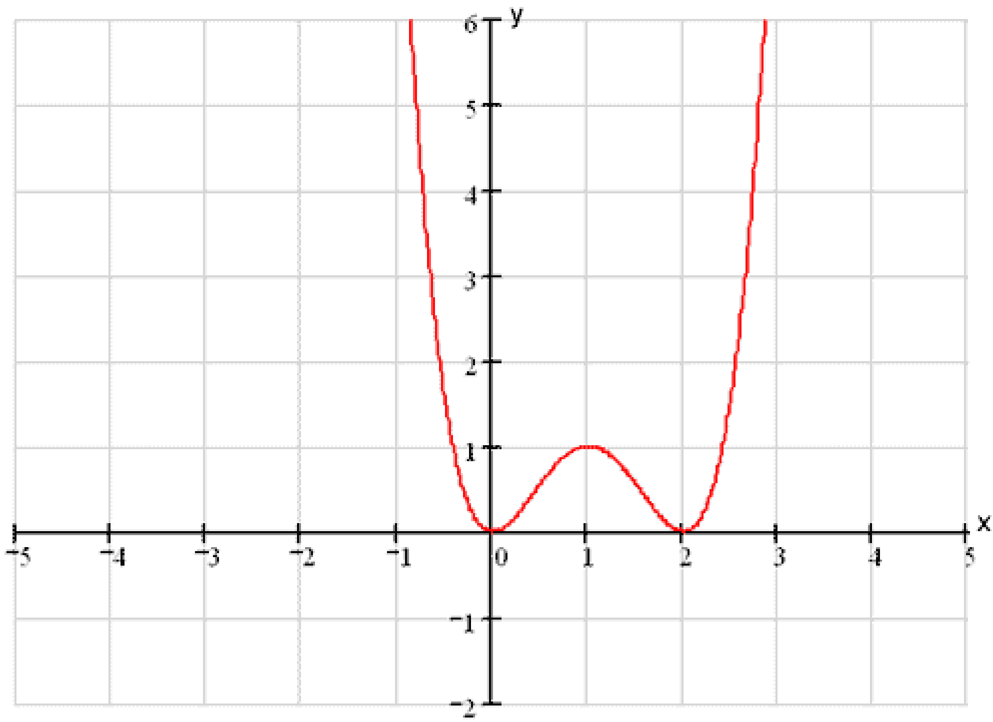
При $y' = 0$, $\begin{cases} x = 2, \\ x = 1, \\ x = 0 \end{cases}$



(0;0)- точка минимума,

(2;0)- точка минимума,

(1;1)- точка максимума.



Задача 2. Построить схематически график функции с помощью производной первого порядка.

Дано: $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 2x}$.

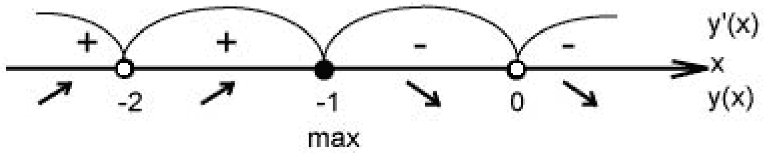
Решение.

1) $D(y) = (-\infty;+\infty)$.

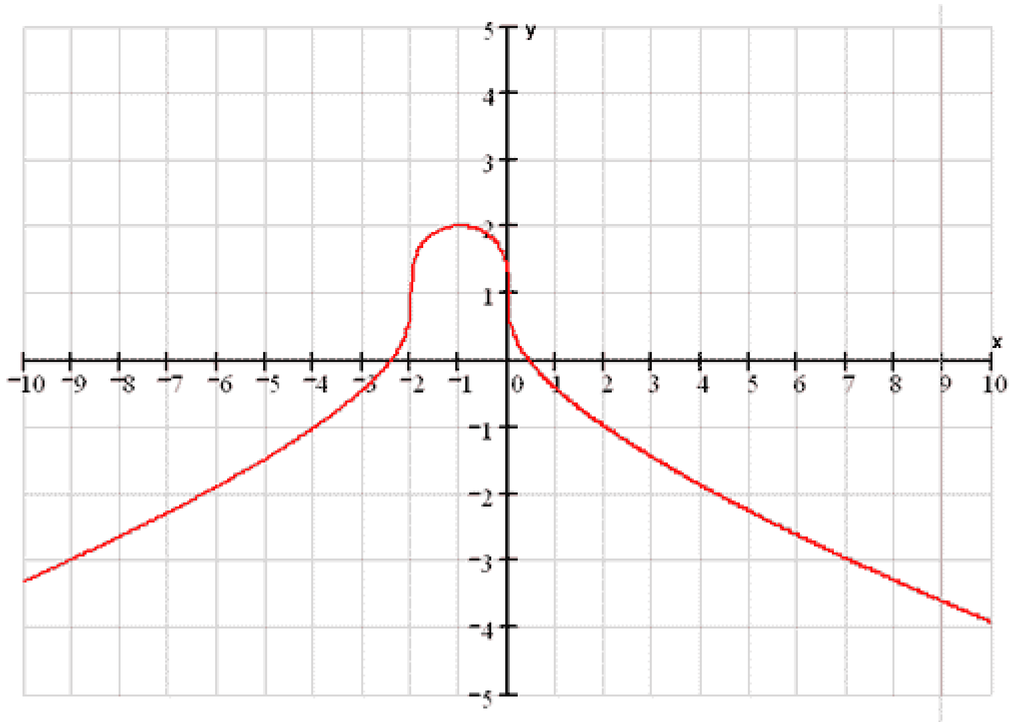
2) Функция ни четная, ни нечетная.

3) $y' = -\dfrac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x)^2}}$.

При $y' = 0$, $x = 1$; y' не существует в точках $x = 0$ и $x = -2$.



(-1;2)- точка максимума.



Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.

Дано: $y = 2x^2 + \dfrac{108}{x} - 59, [2,4]$

Решение. ОДЗ $x \neq 0$.

$y' = 4x - \dfrac{108}{x^2} = \dfrac{4x^3 - 108}{x^2}$. При $y' = 0$, $x = 3 \in [2;4]$;

y' не существует при $x = 0 \notin [2;4]$.

$y(2) = 3, y(3) = -5, y(4) = 0.$

$\max\limits_{[2;4]} y = y(2) = 3; \min\limits_{[2;4]} y = y(3) = 5;$

Задача 4. Найти асимптоты и построить график функции: $y = \dfrac{17 - x^2}{4x - 5}$.

Решение.

1) $D(y) = \left(-\infty; \dfrac{5}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5}{4}; +\infty\right)$.

2) Функция ни четная, ни нечетная.

3) Вычислим односторонние пределы:

а) $\lim\limits_{x \to \frac{5}{4} - 0} \dfrac{17 - x^2}{4x - 5} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{5}{4} + 0} \dfrac{17 - x^2}{4x - 5} = +\infty$, $x = \dfrac{5}{4}$ -вертикальная асимптота.

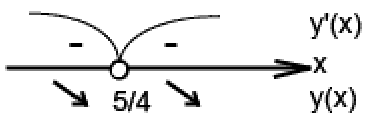
б) $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{17 - x^2}{x(4x - 5)} = -\dfrac{1}{4}$.

$$b = \lim_{x \to \infty}(f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{17 - x^2}{4x - 5} + \frac{x}{4}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{68 - 5x}{16x - 20} = -\frac{5}{16}.$$

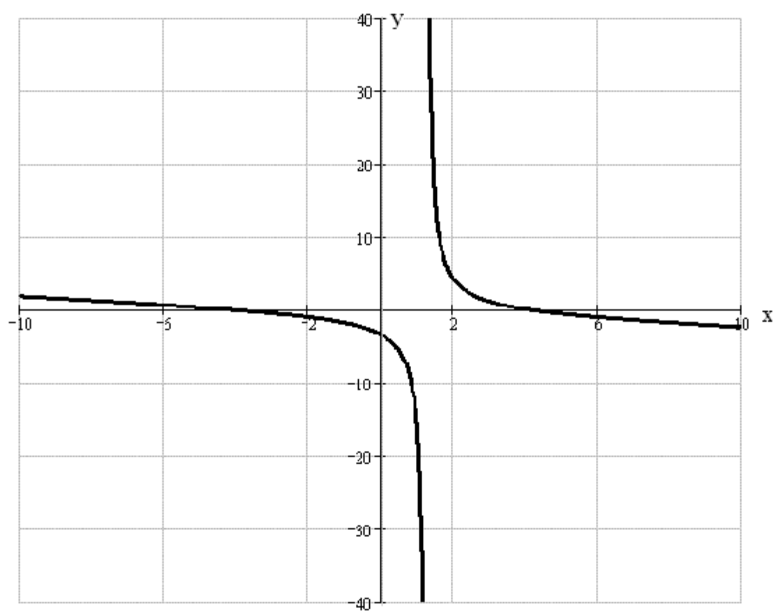
Следовательно, $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{5}{16}$ - наклонная асимптота.

4) $y' = \dfrac{-2x(4x - 5) - 4(17 - x^2)}{(4x - 5)^2} = -\dfrac{4x^2 + 10x + 68}{(4x - 5)^2}$.

y' не существует при $x = \dfrac{5}{4}$.



5) Найдем точки пересечения с осями:При $x = 0$ $y = -\dfrac{17}{5}$. При $y = 0$ $x = \pm 4{,}12$.



Задача 5. Провести полное исследование функции и построить ее график.

$$y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}.$$

1) $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2) Функция ни четная, ни нечетная.

3)

а) $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x^2-3x+3}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x^2-3x+3}{x-1}=+\infty$, $x=1$-вертикальная асимптота.

б) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+3}{x(x-1)}=1.$

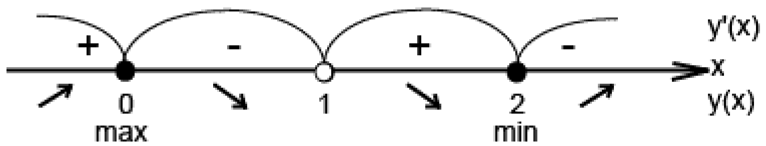
$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+3}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+3}{x-1}=-2\,.$$

Следовательно, $y=x-2$ - наклонная асимптота.

4) $y'=\frac{-(2x-3)(x-1)-(x^2-3x+3)}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$

$y'=0$ при $\begin{cases}x=0,\\ x=1\end{cases}$

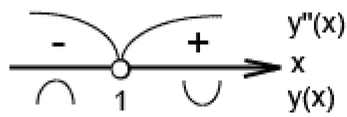
y' не существует при $x=1.$



$(0;-3)$-точка максимума функции, $(2;1)$-точка минимума функции.

5) $y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3},$

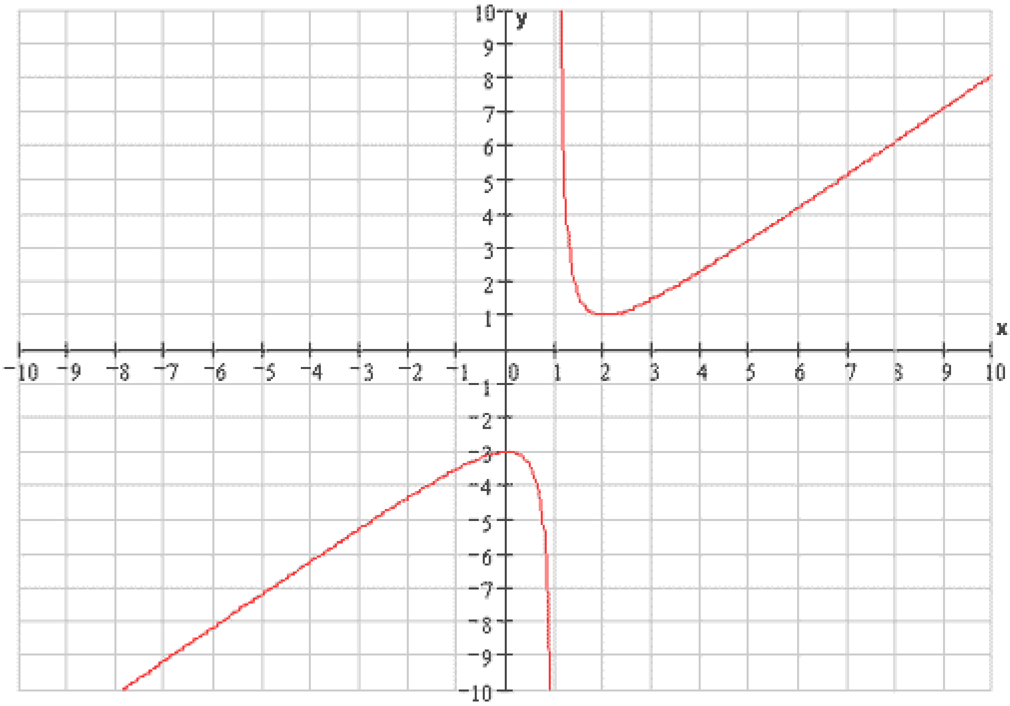
y'' не существует при $x=1.$



6) Найдем точки пересечения с осями:

При $x=0$ $y=-3$.

При $y=0$ квадратное уравнение не имеет корней, следовательно график не пересекается с осью Ox.



Задача 6. Провести полное исследование функции и построить график: $y = \dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$.

1) $D(y) = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

2) Функция ни четная, ни нечетная.

3)

а) $\lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)} = +\infty$, $x = -1$-вертикальная асимптота.

б) $k = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)x} = -\infty$,

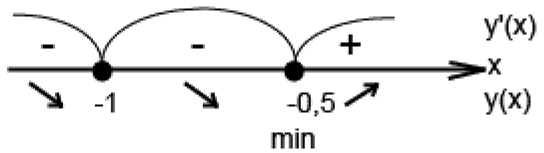
$k = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)x} = 0$. $b = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)} = 0$..

Следовательно, $y = 0$ - горизонтальная асимптота.

4) $y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2(x+1)e^{e(x+1)} - e^{2(x+1)}}{(x+1)^2} = \dfrac{(2x+1)e^{2(x+1)}}{2(x+1)^2}$.

$y' = 0$ при $x = -0{,}5$,

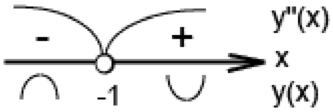
y' не существует при $x = -1$.



$\left(-\dfrac{1}{2};e\right)$-точка минимума функции.

5) $y'' = \dfrac{(2x^2 - 2x + 1)e^{2(x+1)}}{(x+1)^3}$,

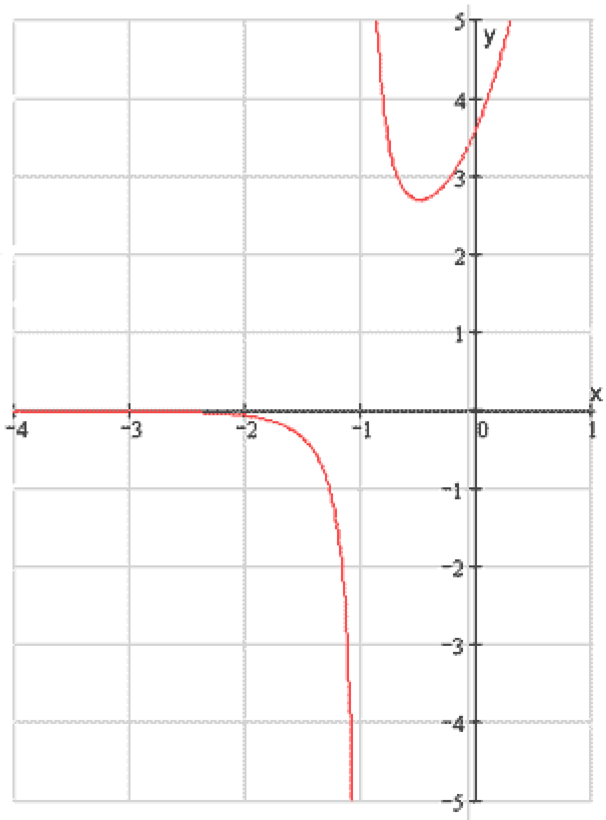
y'' не существует при $x = -1$.



6) Найдем точки пересечения с осями:

При $x = 0$ $y = \dfrac{e^2}{2}$.

При $y = 0$ квадратное уравнение не имеет корней, следовательно график не пересекается с осью Ox.



Задача 7. Провести полное исследование функции и построить график: $y = \sqrt[3]{(2-x)(x^2 - 4x + 1)}$.

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) Функция ни четная, ни нечетная.

3)

а) вертикальных асимптот нет.

б) $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{(2-x)(x^2 - 4x + 1)}}{x} = -1$,

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(2-x)(x^2-4x+1)-x^3}{\sqrt[3]{(2-x)^2(x^2-4x+1)^2}+x\sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}+x^2}=$$

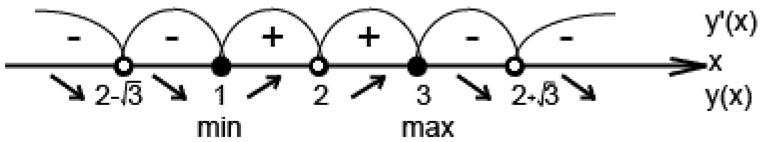
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-9x+6x^2-2x^3}{\sqrt[3]{(2-x)^2(x^2-4x+1)^2}+x\sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}+x^2}=\frac{-2}{-1}=2.$$

Следовательно, $y=-x+2$ - наклонная асимптота.

4) $y'=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{-9+12x-3x^2}{\sqrt[3]{(2-x)^2(x^2-4x+1)^2}}=\dfrac{-x^2+4x-3}{\sqrt[3]{(2-x)^2(x^2-4x+1)^2}}.$

$y'=0$ при $\begin{cases}x=1,\\ x=3\end{cases}$,

y' не существует при $\begin{cases}x=2,\\ x=2\pm\sqrt{3}.\end{cases}$,



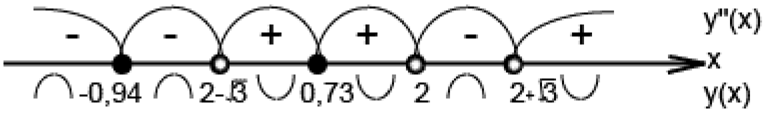
$\left(1;-\sqrt[3]{2}\right)$-точка минимума функции,

$\left(3;\sqrt[3]{2}\right)$- точка максимума функции.

5) $y''=\dfrac{-(4x^4-16x^3+14x^2-8x+10)}{\sqrt[3]{(2-x)^5(x^2-4x+1)^5}}$,

$y''=0$ при $\begin{cases}x=-0{,}94;\\ x=0{,}73\end{cases}$,

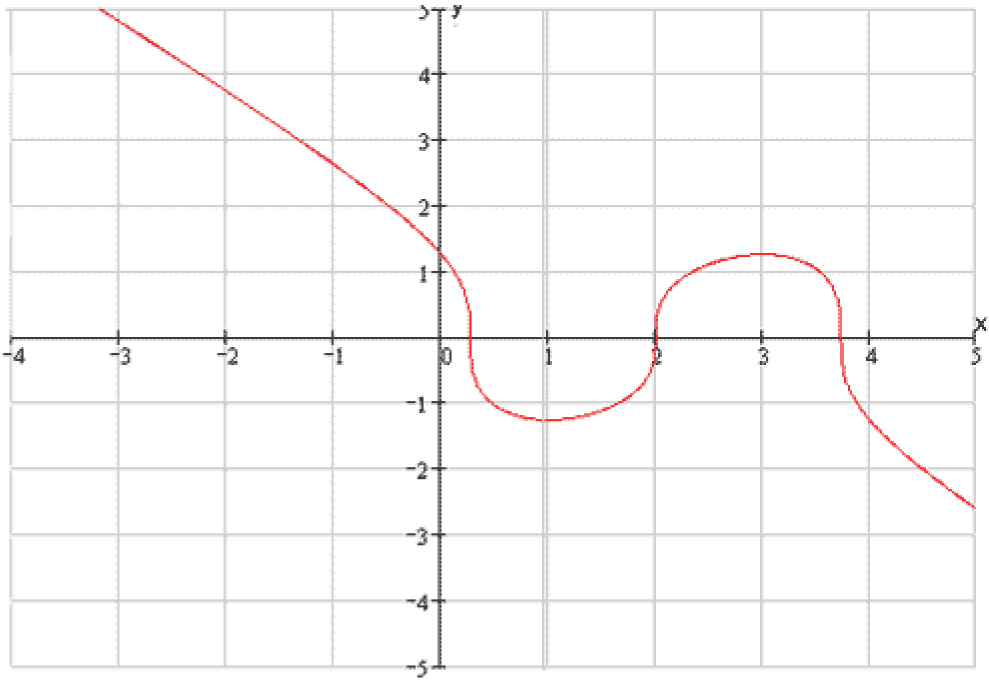
y'' не существует при $\begin{cases}x=2,\\ x=2\pm\sqrt{3}.\end{cases}$,



6) Найдем точки пересечения с осями:

При $x=0$ $y=\sqrt[3]{2}$.

При $y=0$ $\begin{cases}x=2,\\ x=2\pm\sqrt{3}.\end{cases}$



Задача 8. Провести полное исследование функции и построить ее график.

$y = e^{\sin x + \cos x}$.

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) Функция ни четная, ни нечетная.

3)

а) вертикальных асимптот нет.

б) наклонных асимптот нет.

4) функция является периодической

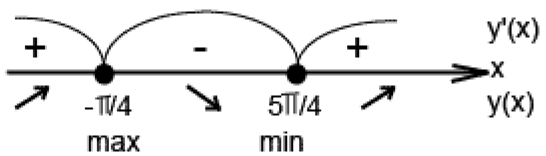
$$T = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in z.$$

5) $y = e^{\sin x + \cos x}$.

$$y = e^{\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})},$$

$$y' = -\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})e^{\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})}$$

$y' = 0$, тогда $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 0,$ $\qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in z$.



6) $y'' = -\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)e^{\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)e^{\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} =$

$$= \sqrt{2}e^{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\left(-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$= \sqrt{2}e^{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\left(\sqrt{2}-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

$y'' = 0$ при $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in z.$,

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in z. \\ x = -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in z. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in z. \\ x = 2\pi k, k\in z. \end{array}\right.$$

При $x \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; 2\pi k\right)$ функция вогнута, т.к. $y'' > 0$.

При $x \in \left(2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ функция выпукла, т.к. $y'' < 0$.

Точки перегиба:

$$(2\pi k; e),\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right).$$