Задача 1. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \ln(4x^2+1)dx = \left| \begin{matrix} u=\ln(4x^2+1) & dv=dx \\ du=\dfrac{8x}{4x^2+1} & v=x \end{matrix} \right| = x\ln(4x^2+1) - 8\int \frac{x^2}{4x^2+1}dx =$$

$$= x\ln(4x^2+1) - 2\int\left(1-\frac{1}{4x^2+1}\right)dx = x\ln(4x^2+1) - 2\left(x - \frac{1}{2}arctg2x\right) + C =$$

$$= x\ln(4x^2+1) + arctg2x - 2x + C.$$

Задача 2. Вычислить определенный интегралы.

$$\int_{-2}^{0}(x^2-4)\cos 3xdx = \left| \begin{matrix} u=x^2-4 & dv=\cos 3xdx \\ du=2xdx & v=\dfrac{1}{3}\sin 3x \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}(x^2-4)\sin 3x\Big|_{-2}^{0} -$$

$$-\frac{2}{3}\int_{-2}^{0} x\sin 3xdx = \left| \begin{matrix} u=x & dv=\sin 3xdx \\ du=dx & v=-\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right| = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x\cos 3x\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{3}\int_{-2}^{0}\cos 3xdx\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\cos 6 + \frac{1}{9}\sin 3x\Big|_{-2}^{0}\right) = \frac{4}{9}\cos 6 - \frac{2}{27}\sin 6.$$

Задача 3. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx = \left| \begin{matrix} x-\sin x = t \\ (1-\cos x)dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -t^{-1} + C = -\frac{1}{x-\sin x} + C.$$

Задача 4. Вычислить определенный интеграл.

$$\int_{0}^{1/2}\frac{8x - arctg2x}{1+4x^2}dx = \int_{0}^{1/2}\frac{8x}{1+4x^2}dx - \int_{0}^{1/2} arctg2xd(arctgx) =$$

$$= \ln\left|1+4x^2\right|\Big|_{0}^{1/2} - \frac{1}{2}arctg^2 2x\Big|_{0}^{1/2} = \ln 2 - 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{16} + 0 = \ln 2 - \frac{\pi^2}{32}.$$

Задача 5. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx.$$

Выделим целую часть дроби, методом деления многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{l|l} x^3-3x^2-12 & x^3-9x^2+26x-24 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-9x^2+26x-24} & \qquad 1 \\ 6x^2-26x+12 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx = \int\left(1 + \frac{6x^2-26x+12}{(x-4)(x-3)(x-2)}\right)dx$$

Разложим дробь $\dfrac{6x^2-26x+12}{(x-4)(x-3)(x-2)}$ на простейшие методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{6x^2-26x+12}{(x-4)(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x-3)(x-2)+B(x-4)(x-2)+C(x-4)(x-3)}{(x-4)(x-3)(x-2)}.$$

$$A(x+2)^3+B(x+1)(x+2)^2+C(x+1)(x+2)+D(x+1)=x^3+6x^2+13x+9.$$

При $x=4$, $2A=4\Rightarrow A=2;$ При $x=3$, $-B=-12\Rightarrow B=12;$ При $x=2$, $2C=-16\Rightarrow C=-8;$

Отсюда $\int\left(1+\frac{6x^2-26x+12}{(x-4)(x-3)(x-2)}\right)dx=\int\left(1+\frac{2}{x-4}+\frac{12}{x-3}-\frac{8}{x-2}\right)dx=$

$=x+2\ln|x-4|+12\ln|x-3|-8\ln|x-2|+C.$

Задача 6. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx.$

Разложим дробь $\frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}$ на простейшие

$$\frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}=\frac{A}{x+`}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{(x+2)^3}=$$
$$=\frac{A(x+2)^3+B(x+1)(x+2)^2+C(x+1)(x+2)+D(x+1)}{(x+1)}.$$

$$A(x-3)(x-2)+B(x-4)(x-2)+C(x-4)(x-3)=6x^2-26x+12.$$

При $x=-1$, $A=1;$

При $x=-2$, $-D=-1\Rightarrow D=1;$

Приравнивая коэффициенты при x^3, $A+B=1\Rightarrow B=0;$

Приравнивая коэффициенты при x^0, $8A+4B+2C+D=9\Rightarrow C=0;$

Отсюда $\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+2)^3}\right)dx=\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+2)^2}+C.$

Задача 7. Найти неопределенный интеграл: $\int\frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}dx.$

Разложим дробь $\frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}$ на простейшие

$$\frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}=$$
$$=\frac{A(x+2)(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)(x+2)^2}{(x+2)^2(x^2+4)}.$$

$$A(x+2)(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+4x+4)=x^3+5x^2+12x+4.$$

При $x=-2$, $8B=-8\Rightarrow B=-1;$

Приравнивая коэффициенты при x^3, $A+C=1\Rightarrow A=0;$

Приравнивая коэффициенты при x, $4A+4C+4D=12 \Rightarrow C=1$;

Приравнивая коэффициенты при x^0, $8A+4B+4D=4 \Rightarrow D=2$;

Отсюда $\int\left(-\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{x+2}{x^2+4}\right)dx=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{2x}{x^2+4}\right)+2\int\frac{dx}{x^2+4}=.$

$$=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+arctg\frac{x}{2}+C.$$

Задача 8. Вычислить определенный интеграл.

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}dx=\left|\begin{matrix} tg\frac{x}{2}=t & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} & \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\end{matrix}\right|=\int_0^1\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}}{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=\int_0^1\frac{2(1-2t-t^2)}{(1+t)^4}dt.$$

Разложим дробь $\frac{2(1-2t-t^2)}{(1+t^4)}$ на простейшие

$$\frac{2-4t-2t^2)}{(1+t)^4}=\frac{A}{1+t}+\frac{B}{(1+t)^2}+\frac{C}{(1+t^3)}+\frac{D}{(1+t)^4}=$$
$$=\frac{A(1+t)^3+B(1+t)^2+C(1+t)+D}{(1+t)^4}.$$

$$A(1+t)^3+B(1+t)^2+C(1+t)+D=2-4t-2t^2.$$

При $t=-1,\ D=4$;

Приравнивая коэффициенты при t^3, $A=0$;

Приравнивая коэффициенты при t^2, $3A+B=-2 \Rightarrow B=-2$;

Приравнивая коэффициенты при t, $3A+2B+C=-4 \Rightarrow C=0$;

Отсюда $\int_0^1\left(\frac{4}{(1+t)^4}-\frac{2}{(1+t)^2}\right)dt=\left(-\frac{4}{3(1+t)^3}+\frac{2}{1+t}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{4}{3\cdot 8}+1+\frac{4}{3}-2=\frac{1}{6}.$

Задача 9. Вычислить определенный интеграл.

$$\int_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}3}\frac{\mathrm{dx}}{(3\mathrm{tgx}+5)\sin 2\mathrm{x}}=\left|\begin{matrix}\mathrm{tgx}=\mathrm{t} & \\ \mathrm{dx}=\frac{\mathrm{dt}}{1+\mathrm{t}^2} & \sin 2\mathrm{x}=\frac{2\mathrm{t}}{1+\mathrm{t}^2}\end{matrix}\right|=\int_1^3\frac{\mathrm{dt}}{(3\mathrm{t}+5)\frac{2\mathrm{t}}{1+\mathrm{t}^2}(1+\mathrm{t}^2)}=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}(3\mathrm{t}+5)}.$$

$$\frac{1}{\mathrm{t}(3\mathrm{t}+5)}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{t}}+\frac{\mathrm{B}}{3\mathrm{t}+5}=\frac{\mathrm{A}(3\mathrm{t}+5)+\mathrm{Bt}}{\mathrm{t}(3\mathrm{t}+5)},\Rightarrow \mathrm{A}(3\mathrm{t}+5)+\mathrm{Bt}=1.$$

При $t=0$, $A=\frac{1}{5}$; При $t=-\frac{5}{3}$, $B=-\frac{3}{5}$;

Отсюда

$$\frac{1}{10}\int_1^3\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{3t+5}\right)dt=\frac{1}{10}\left(\ln|t|-\ln|3t+5|\right)\Big|_1^3=\frac{1}{10}(\ln 3-\ln 14-0+\ln 8)=\frac{1}{10}\ln\frac{24}{14}=\frac{1}{10}\ln\frac{12}{7}.$$

Задача 10. Вычислить определенный интеграл.

$$\int_0^\pi 2^4\cos^8\frac{x}{2}dx=\int_0^\pi(1+\cos x)^4dx=\int_0^\pi(1+2\cos x+\cos^2 x)^2dx=$$

$$=\int_0^\pi(1+3\cos x+6\cos^2 x+4\cos^3 x+\cos^4 x)dx=$$

$$=\int_0^\pi\left(\frac{35}{8}+3\cos x+\frac{7}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx+4\int_0^\pi(1-\sin^2 x)\cos x dx=$$

$$=\left(\frac{35}{8}x+3\sin x+\frac{7}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right)\Bigg|_0^\pi+4\int_0^\pi(1-\sin^2 x)d(\sin x)=$$

$$=\frac{35}{8}\pi+4(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x)\Big|_0^\pi=\frac{35}{8}\pi.$$

Задача 11. Вычислить определенный интеграл.

$$\int_6^9\sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}dx=\left|\begin{array}{c}\frac{9-2x}{2x-21}=t^2\\ dx=\frac{12t}{(t^2+1)}dt\end{array}\right|=12\int t\frac{t}{(t^2+1)^2}dt=12\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}t=tga\\ dt=\frac{da}{\cos^2 a}\end{array}\right|=12\int tg^2\cos^2 a da=12\int\sin^2 a da=6\int(1-\cos 2a)da=$$

$$=6arctgT-3\sin(2arctgt)=\left(6artctg\sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}-3\sin\left(2arctg\sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}\right)\right)\Bigg|_6^9=$$

$$=6arctg\sqrt{3}-3\sin(2arctg\sqrt{3})-6arctg\frac{1}{3}+3\sin(2arctg\frac{1}{\sqrt{3}})=2\pi-3\sin\frac{2\pi}{3}-$$

$$-\pi+3\sin\frac{\pi}{3}=\pi-3\frac{\sqrt{3}}{2}+3\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi.$$

Задача 12. Вычислить определенный интеграл.

$$\int_0^3\frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}=\left|\begin{array}{c}x=3tgt\\ dx=\frac{3dt}{\cos^2 t}\end{array}\right|=\int_0^{\pi/4}\frac{3dt}{(9+9tg^2t)^{3/2}\cos^2 t}=$$

$$=\frac{3}{27}\int_0^{\pi/4}\frac{\cos^3 t}{\cos^2 t}dt=\frac{3}{27}\int_0^{\pi/4}\cos t dt=\frac{3}{27}\sin t\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{18}.$$

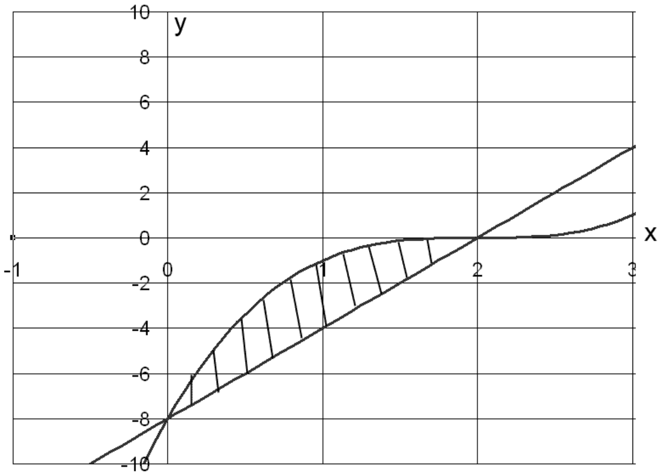
Задача 13. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x\sqrt[6]{x^5}}\,dx = \int x^{-\frac{11}{6}}\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}\,dx = \left| \begin{matrix} 1+x^{-\frac{1}{2}}=t^2 \\ dx=-4t(t^2-1)^{-3}\,dt \end{matrix} \right| =$$

$$= -4\int (t^2-1)^{\frac{11}{3}}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^2}\,t(t^2-1)^{-3}\,dt = -4\int t(t^2-1)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^2}\,dt =$$

$$= -4\int t^{\frac{7}{3}}\,dt = -4\cdot\frac{3}{10}t^{\frac{3}{10}} + C = -\frac{6}{5}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5} + C.$$

Задача 14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y=(x-2)^3,\ y=4x-8.$

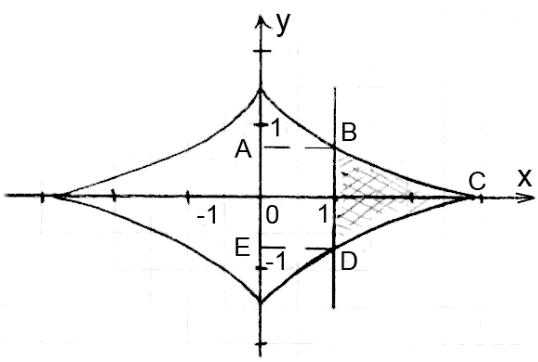


$$S = 2\int_0^2 (4x-8-(x-2)^3)\,dx = 2\int_0^2 (4x-8-x^3+6x^2-12x+8)\,dx =$$

$$= 2\int_0^2 (6x^2-x^3-8x)\,dx = 2(2x^3-\frac{1}{4}x^4-4x^2)\Big|_0^2 = 4\cdot 2^3-\frac{1}{2}\cdot 2^4-8\cdot 2^2 = 8.$$

Задача 15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями.

$$\begin{cases} \mathrm{x}=2\sqrt{2}\cos^3 \mathrm{t}, \\ \mathrm{y}=\sqrt{2}\sin^3 \mathrm{t}, \end{cases} \quad \text{если} \quad \mathrm{x}=1\ (\mathrm{x}\ge 1).$$



$S=\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)\,dt.$ Пределы интегрирования найдем из решения неравенства

$$2\sqrt{2}\cos^3 t \geq 1 \Rightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right].$$

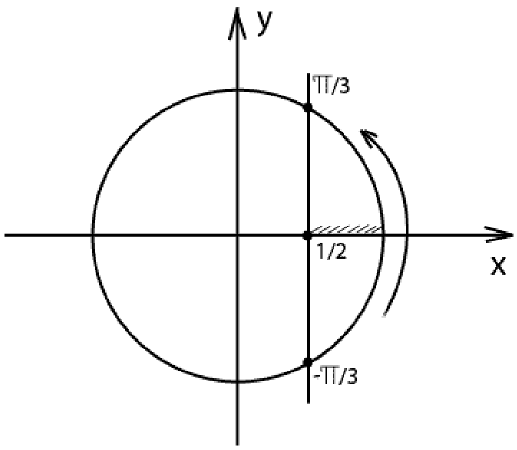
$$S = S_{ABCDE} - S_{ABDE} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{2}\sin^3 t \cdot 6\sqrt{2}\cos^2 t \cdot (-\sin t)dt = 1\cdot 1 =$$

$$12\int \sin^4 t\cos^2 t dt - 1 = 12\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{8}(\cos 4t - 4\cos 2t + 3)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt - 1 =$$

$$= \frac{12}{16}\int_{\pi/4}^{-\pi/4}(-\cos 4t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}\cos 6t + 1)dt - 1 =$$

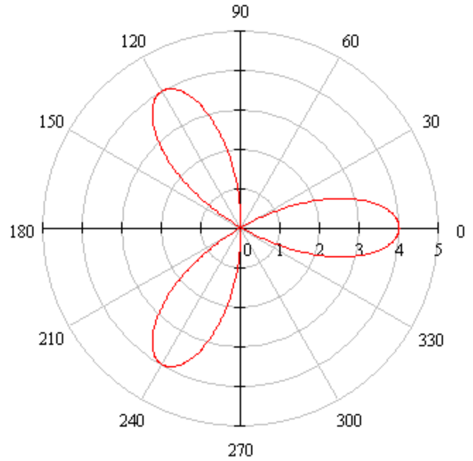
$$= \frac{12}{16}\left(-\frac{1}{4}\sin 4t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{12}\sin 6t + t\right)\Bigg|_{\pi/4}^{-\pi/4} - 1 = 1,7.$$

Задача 16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнением в полярных координатах: $r = 4\cos\varphi, r = 2(r \geq 2)$.



$$4\cos 3\varphi \geq 2, \Rightarrow \cos 3\varphi \geq \frac{1}{2}.$$

Отсюда
$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 3\varphi \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$
$$-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z,$$



$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi,$$

$$S=6\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{0}16\cos^2 3\varphi d\varphi=24\int_{-\pi/3}^{0}(1+6\cos\varphi)d\varphi=24(\varphi+\frac{1}{6}\sin 6\varphi)\Big|_{-\pi/3}^{0}=$$

$$=24(0+0+\frac{\pi}{3}+\frac{1}{6}\cdot 0)=8\pi.$$

Задача 17. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат.

$$y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x, 0\le x\le\frac{8}{9}.$$

Решение. $\mathrm{y}'=-\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{1-\mathrm{x}^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{x}^2}}=\frac{-1-\mathrm{x}}{\sqrt{1-\mathrm{x}^2}}.$

$$\mathrm{l}=\int_a^b\sqrt{1+(\mathrm{y}')^2}\mathrm{dx},$$

$$\mathrm{l}=\int_0^{8/9}\sqrt{1+\frac{(\mathrm{x}+1)^2}{1-\mathrm{x}^2}}\mathrm{dx}=\int_0^{8/9}\sqrt{\frac{1-\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+1}{1-\mathrm{x}^2}}\mathrm{dx}=\int_0^{8/9}\sqrt{\frac{2+2\mathrm{x}}{1-\mathrm{x}^2}}\mathrm{dx}=$$

$$=\int_0^{8/9}\sqrt{\frac{2}{1-\mathrm{x}}}\mathrm{dx}=\sqrt{2}\int_0^{8/9}\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-\mathrm{x}}}=\int_0^{8/9}\sqrt{\frac{2}{1-\mathrm{x}}}\Big|_0^{8/9}=-2(\sqrt{2/9}-\sqrt{2})=-2\sqrt{2/9}+2\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Задача 18. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями.

$$\begin{cases}\mathrm{x}=4(\cos\mathrm{t}+\mathrm{t}\sin\mathrm{t}),\\ \mathrm{y}=4(\sin\mathrm{t}-\mathrm{t}\cos\mathrm{t}),\end{cases}\ \text{если}\ \ 0\le\mathrm{t}\le 2.$$

Решение.

$$x'=4(-\sin t+\sin t+t\cos t)=4t\cos t,$$
$$y'=4(\cos t-\cos t+t\sin t)=4t\sin t.$$

$$\mathrm{l}=\int_a^b\sqrt{(\mathrm{x}_t')^2+(\mathrm{y}_t')^2}\mathrm{dt},\Rightarrow\mathrm{l}=\int_0^2\sqrt{16\mathrm{t}^2\cos^2\mathrm{t}+16\mathrm{t}^2\sin^2\mathrm{t}}\mathrm{dt}=\int_0^2 4\mathrm{tdt}=2\mathrm{t}^2\Big|_0^2=2\cdot 2^2=8.$$

Задача 19. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнениями в полярных координатах.

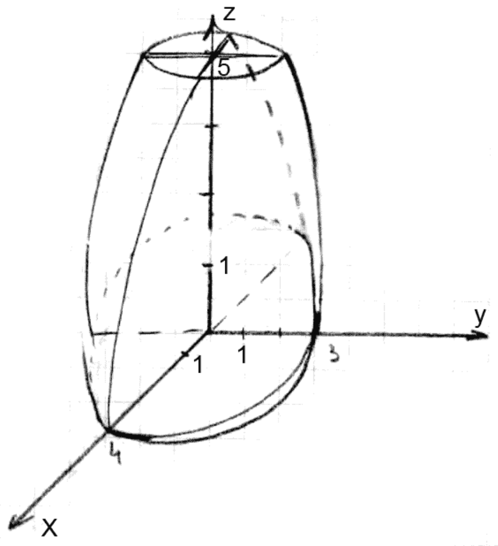
$$\rho=2e^{4\varphi/3},$$
$$-\pi/2\le\varphi\le\pi/2.$$

$$\mathrm{L}=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi;\ \rho'=\frac{8}{3}\mathrm{e}^{4\varphi/3}.$$

$$L=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{4e^{8\varphi/3}+\frac{64}{9}e^{8\varphi/3}}d\varphi=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\frac{100}{9}e^{8\varphi/3}}d\varphi=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{4\varphi/3}d\varphi=$$

$$=\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{4}e^{4\varphi/3}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{5}{2}\left(e^{\frac{2\pi}{3}}-e^{-\frac{2\pi}{3}}\right).$$

Задача 20. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{64}=1, z=4, z=0.$

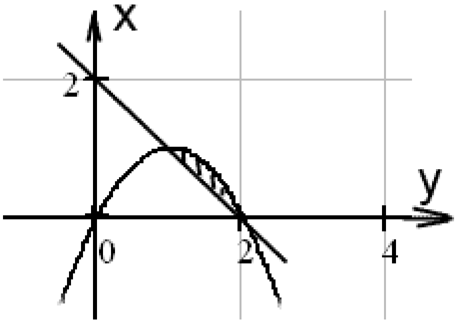


Поперечным сечением является эллипс: $\frac{x^2}{16\left(1-\frac{z^2}{64}\right)}+\frac{y^2}{9\left(1-\frac{z^2}{64}\right)}=1.$

Площадь эллипса $S(z)=\pi ab=12\pi\left(1-\frac{z^2}{64}\right).$

Объем : $V=12\pi\int\left(1-\frac{z^2}{64}\right)dz=12\pi\left(z^2-\frac{z^3}{192}\right)\Big|_0^5=12\pi\left(5-\frac{125}{192}\right)=52\pi.$

Задача 21. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций, относительно оси вращения Ox : $y=2x-x^2, y=-x+2.$



$$V=\pi\int_a^b y^2dx.\Rightarrow V=\pi\int_1^2(2x-x^2+x-2)^2dx=\pi\int_1^2(-x^2+3x-2)^2dx=$$

$$=\pi\int_1^2(x^4-6x^3+13x^2-12x+4)dx=\pi\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{2}x^4+\frac{13}{3}x^3-6x^2+4x\right)\Big|_1^2=$$

$$=\pi\left(\frac{32}{5}-24+\frac{104}{3}-24+8-\frac{1}{5}+\frac{3}{2}-\frac{13}{3}+6-4\right)=\frac{\pi}{30}.$$

Задача 22. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции (рис.4.1). Плотность воды, $\rho = 1000\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения положить равным $g = 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Известно, что давление на глубине x равно $\rho g x$.

$a = 6{,}6\text{м}, b = 10{,}8\text{м}, h = 4{,}0\text{м}.$

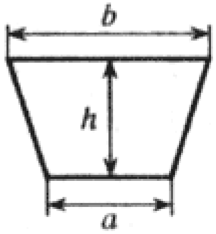


Рис. 4.1

$$dF = \rho gh \cdot \frac{a+b}{2} hdh.$$

$$F = \rho g \frac{a+b}{2}\int_0^4 h^2 dh = 1000 \cdot 10 \cdot \frac{6{,}6+10{,}8}{2} \cdot \int_0^4 h^2 dh = 87000 \cdot \left.\frac{h^3}{3}\right|_0^4 = 1856000\,H.$$

$$F = 18{,}56kH.$$