Задача. Даны ненулевые матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Найти условия, при которых произведение матриц всегда обращается в нулевую матрицу $A \cdot B \equiv 0$.

Решение. Пусть $A \cdot B \equiv 0$, где 0 - нулевая матрица, тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{12} & b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 0 \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 0 \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_{11} \cdot b_{11} + 0 \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{21} + 0 \cdot b_{22} = 0 \\ 0 \cdot b_{11} + a_{11} \cdot b_{12} + 0 \cdot b_{21} + a_{12} \cdot b_{22} = 0 \\ a_{21} \cdot b_{11} + 0 \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{21} + 0 \cdot b_{22} = 0 \\ 0 \cdot b_{11} + a_{21} \cdot b_{12} + 0 \cdot b_{21} + a_{22} \cdot b_{22} = 0 \end{cases}$$

Получена однородная система уравнений. Как известно, для того чтобы однородная система имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных. Это возможно только в том случае, если определитель последней системы равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, получим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\left(a_{11}a_{22}a_{22} - a_{12}a_{22}a_{21}\right) + a_{12}\left(a_{21}a_{21}a_{12} - a_{11}a_{21}a_{22}\right) = \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)^2$$

Приравнивая определитель к нулю, окончательно получим условие, при котором система имеет ненулевое решение:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Определим теперь ранг матрицы системы. Предположим, что все коэффициенты матрицы A отличны от нуля. Выполним преобразования и учитывая полученное условие $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, получим:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \overset{\substack{I \cdot a_{22} - III \cdot a_{12} \to III \\ II \cdot a_{22} - IV \cdot a_{12} \to IV}}{\sim} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 & a_{12}a_{22} - a_{12}a_{22} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 & a_{12}a_{22} - a_{12}a_{22} \end{pmatrix} \sim$$

$\sim \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, ранг матрицы равен 2.

Замечание. Ранг матрицы также будет равен 2, если хотя бы один из коэффициентов матрицы A отличен от нуля.

Таким образом, в системе из четырех уравнений, независимыми являются только два, поэтому будем рассматривать систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 0 \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0 \end{cases}$$

Пусть $a_{12} = t \cdot a_{11}$, тогда система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{11} \cdot t \cdot b_{21} = 0 \\ a_{11}b_{12} + a_{11} \cdot t \cdot b_{22} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b_{11} + t \cdot b_{21} = 0 \\ b_{12} + t \cdot b_{22} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b_{11} = -t \cdot b_{21} \\ b_{12} = -t \cdot b_{22} \end{cases}$$

А из условия $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, после подстановки $a_{12} = t \cdot a_{11}$ получим следующее соотношение $a_{11}a_{22} - a_{11} \cdot t \cdot a_{21} = 0$ или $a_{22} = t \cdot a_{21}$. Таким образом, окончательно получаем выражения, которые определяют условия обращения произведения ненулевых матриц в нулевую матрицу

$$\begin{cases} a_{12} = \ \ t \cdot a_{11} \\ a_{22} = \ \ t \cdot a_{21} \\ b_{11} = -t \cdot b_{21} \\ b_{12} = -t \cdot b_{22} \end{cases}$$

Полученное условие удобнее представить в матричном виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & t \cdot a_{11} \\ a_{21} & t \cdot a_{21} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -t \cdot b_{21} & -t \cdot b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы, легко убедиться в том что их произведение дает нулевую матрицу:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & t \cdot a_{11} \\ a_{21} & t \cdot a_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t \cdot b_{21} & -t \cdot b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -t \cdot a_{11}b_{21} + t \cdot a_{11} \cdot b_{21} & -t \cdot a_{11}b_{22} + t \cdot a_{11} \cdot b_{22} \\ -t \cdot a_{21}b_{21} + t \cdot a_{21} \cdot b_{21} & -t \cdot a_{21}b_{22} + t \cdot a_{21} \cdot b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ. Произведение ненулевых матриц A и B равно нулевой матрице, если для произвольных $a_{11}, a_{21}, b_{21}, b_{22}, t$ матрицы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & t \cdot a_{11} \\ a_{21} & t \cdot a_{21} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -t \cdot b_{21} & -t \cdot b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$