

Пример. Решить систему уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу  $A^{-1}$ .

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; & M_{21} &= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; & M_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1; \\ M_{12} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; & M_{22} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; & M_{32} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16; \\ M_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; & M_{23} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; & M_{33} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}^{-1} &= \frac{5}{30}; & a_{12}^{-1} &= \frac{1}{30}; & a_{13}^{-1} &= \frac{1}{30}; \\ a_{21}^{-1} &= -\frac{10}{30}; & a_{22}^{-1} &= -\frac{14}{30}; & a_{23}^{-1} &= \frac{16}{30}; \\ a_{31}^{-1} &= \frac{5}{30}; & a_{32}^{-1} &= \frac{19}{30}; & a_{33}^{-1} &= -\frac{11}{30}; \end{aligned} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу  $X$ .

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы:  $x = 1$ ;  $y = 2$ ;  $z = 3$ .