

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{BA} = (-2; -3; -4)$$

$$\overrightarrow{BD} = (1; 4; -3)$$

$$\overrightarrow{BC} = (4; -1; -2)$$

Объем пирамиды

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (-2(-8-3) + 3(-2+12) - 4(-1-16)) = \\ &= \frac{1}{6} (22 + 30 + 68) = 20(\text{ед}^3) \end{aligned}$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8-3) - \vec{j}(-2+12) + \vec{k}(-1-16) = -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$

$$|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{11^2 + 10^2 + 17^2} = \sqrt{121 + 100 + 289} = \sqrt{510}$$

$$S_{\text{осн}} = \sqrt{510} / 2 (\text{ед}^2)$$

$$\text{Т.к. } V = \frac{S_{\text{осн}} \cdot h}{3}; \quad h = \frac{3V}{S_{\text{осн}}} = \frac{120}{\sqrt{510}} = \frac{4\sqrt{510}}{17} (\text{ед})$$