МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ
К ЛЕКЦИЯМ НА ТЕМУ

"ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ"

ПРЕДИСЛОВИЕ.

В курсе лекций по высшей математике, читаемом студентам инженерных специальностей, предусматривается знакомство с основами дискретной математики, в частности с теорией множеств и теорией графов. Курсы дискретной математики, предназначенные для инженеров не относятся к числу традиционных и устоявшихся, поэтому практически не существует учебной литературы, ориентированной на студентов начальных курсов. Так как на изучение упомянутых разделов в общем курсе высшей математики, как правило, отводится несколько лекций, то требуется сжатое и доступное изложение материала.

Предлагаемое учебное пособие имеет целью восполнить этот пробел. В краткой форме, основываясь на общеизвестных математических понятиях приводятся основные определения, правила, теоремы теории множеств и теории графов. В какой- то мере учебное пособие может использоваться как справочник по основным определениям и формулам. Кроме того, по каждому разделу приведены примеры основных типов задач и их решения. При формулировке некоторых определений допускались определенные упрощения, не оказывающие существенного влияния на общность излагаемого материала. Такой подход позволил в доступной форме изложить основные положения теории множеств и теории графов, достаточные для решения простейших задач.

Основное содержание методических указаний определяется следующими темами: основные понятия теории множеств; графические диаграммы Венна; основные соотношения для операций над множествами; основные понятия теории графов; изображения графов; неориентированные и ориентированные графы; матрицы смежности и инцидентности; идентификация графов; части, суграфы, подграфы; операции с частями графа; маршруты, цепи, циклы; связность графа, компоненты связности; Эйлеровы циклы, цепи; деревья; свойства деревьев.

Настоящее методическое пособие рекомендуется для использования студентам инженерных специальностей при изучении специальных разделов в курсе высшей математики.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ.

Одними из основных, исходных понятий математики являются понятия множества и его элементов. Множество состоит из элементов. Под множеством будем понимать любое собрание определенных и различимых между собой объектов, представляемых как единое целое. Это интуитивное определение принадлежит немецкому математику Г.Кантору.

Определение. Символом $\in$ обозначим отношение включения элемента в множество. Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B , то будем пользоваться обозначением $A \subset B$. В этом случае множество A является подмножеством множества B.

Определение. Множество называется пустым, если оно не содержит ни одного элемента. Будем обозначать пустое множество символом $\varnothing$.

Определение. Множества A и B называются равными (A=B) , если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Определение. Сумме множеств A+B (или пересечению $A \cup B$) соответствует множество, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.

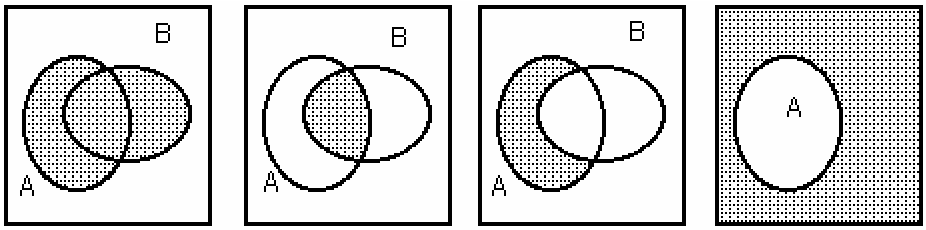
Определение. Произведением множеств A и B называется множество AB (или $A \cap B$), элементы которого принадлежат одновременно A и B (пересечение множеств).

Определение. Разностью множеств A и B называется множество A\B, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Определение. Множество $\bar{A}$ называется дополнением A, если оно состоит из всех элементов пространства Ω, не принадлежащих A, т.е. $\bar{A}=\Omega \setminus A$ или $A+\bar{A}=\Omega$.

Графические диаграммы Венна.

A+B AB A\B $\bar{A}$



Основные соотношения для операций над множествами.

1) $A+A=A$
2) $AA=A$
3) $A+B=B+A$
4) $AB=BA$
5) $A+(B+C)=(A+B)+C$
6) $(AB)C=A(BC)$
7) $A(B+C)=AB+AC$
8) $A+\Omega=\Omega$
9) $A+\bar{\Omega}=A$
10) $A\Omega=A$
11) $A+\bar{A}=\Omega$
12) $A\bar{A}=\bar{\Omega}$
13) $A\setminus B=\overline{AB}$
14) $\bar{\bar{A}}=A$
15) $\overline{A+B}=\bar{A}\,\bar{B}$
16) $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$
17) $\bar{\Omega}=\varnothing$
18) $(A+B)(A+C)=A+BC$

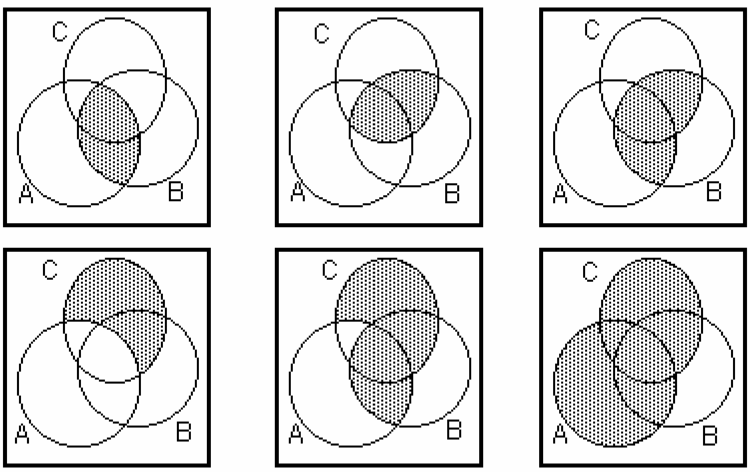
Пример. Доказать, что $A+AB+BC+\bar{A}C=A+C$

Решение. Пользуясь формулами операций над событиями, будем иметь

$$A+AB+BC+\bar{A}C=(A+\bar{A}C)+(AB+BC)=(A+\bar{A}C)+B(A+C)=(A+\bar{A})(A+C)+B(A+C)=$$
$$=\Omega(A+C)+B(A+C)=(\Omega+B)(A+C)=\Omega(A+C)=A+C.$$

Графическое решение.

AB BC AB+BC



$\bar{A}$ $AB+BC+\bar{A}C$ $A+AB+BC+\bar{A}C=AC$

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ.

Теория графов разработана для решения некоторых задач о геометрических конфигурациях, состоящих из точек и линий. В таких задачах несущественна форма соединяющих линий (то ли это отрезки, то ли дуги). Важно только то, что некоторая линия соединяет две точки из некоторого множества. Классической в теории графов является задача о семи мостах. В Кенигсберге на реке Преголь имеется два острова. Схема мостов представлена на рисунке 1.

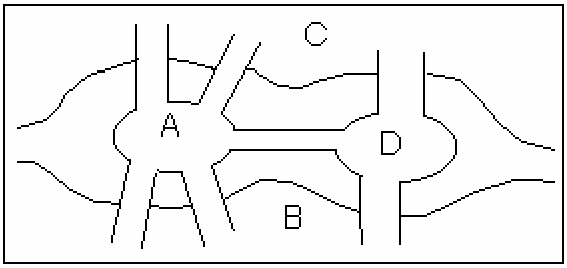


рис.1

Задача состоит в том, чтобы пройдя по каждому мосту ровно один раз вернуться в исходную точку. Приведенной схеме мостов, можно поставить в соответствие граф, изображенный на рисунке 5. При рассмотрении подобных задач достаточно ограничиться исследованием совокупности двух конечных множеств V - точек (вершин) и E - линий (ребер или дуг).

Определение. Графом называется совокупность двух множеств V и E, между которыми определено отношение инцидентности, причем каждому элементу $e \in E$ поставлено в соответствие два элемента $(v_1, v_2) \in V$. Элементы множества V называются вершинами графа G, элементы множества E- его ребрами. Вершины и ребра графа G называют его элементами.

Определение. Ребра, инцидентные вершинам, рассматриваемым в определенном порядке, называются дугами. Граф с дугами называется оринтированным. Первая вершина - начало, вторая - конец дуги. Ориентированный граф кратко называют орграфом.

Определение. Ребра, начинающиеся и заканчивающиеся на одной и той же вершине называются петлями.

Определение. Кратностью ребра называется число ребер, соединящих заданную пару вершин.

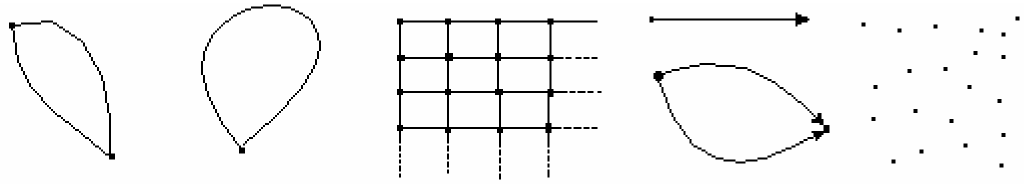
Определение. Если вершина является началом или концом ребра, то говорят что данная вершина и ребро инцидентны.

Определение. Две вершины называются смежными, если они имеют общее ребро.

Определение. Граф с кратными ребрами и петлями называется псевдографом.

Определение. Псевдограф без петель называется графом с кратными ребрами или мультиграфом.

Изображения графов.



Мультиграф Граф - петля Бесконечный граф Ориентированный Пустой граф

Рис.2

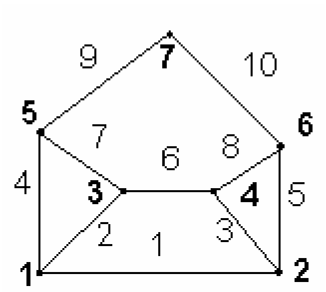
Определение. Каждому неориентированному графу можно поставить в соответствие ориентированный граф с тем же множеством вершин, в котором каждое ребро заменено двумя ориентированными ребрами, инцидентными тем же вершинам и имеющими противоположные направления. Такое соответствие называется каноническим.

МАТРИЦА ИНЦИДЕНТНОСТИ ГРАФА.

Матрица инцидентности неориентированного графа.

Задать граф - значит описать множество его вершин и ребер, а также отношение инцидентности. Если граф конечный, для описания его вершин и ребер достаточно их занумеровать. Пусть $v_1, v_2, \ldots v_n$ - вершины графа G, $e_1, e_2, \ldots, e_m$ - его ребра. Отношение инцидентности можно определить матрицей I_{ij} - имеющей m строк и n столбцов. Столбцы соответствуют вершинам графа, строки - ребрам. Матрица заполняется по следующему правилу: если ребро e_i инцидентно вершине v_j, то I_{ij}=1, противном случае I_{ij}=0. Такая матрица называется матрицей инцидентности неориентированного графа.

Пример. Матрица инцидентности неориентированного графа



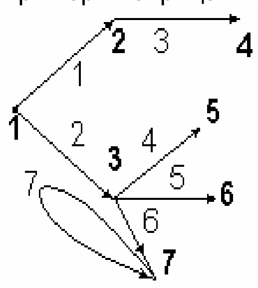
	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0
4	1	0	0	0	1	0	0
5	0	1	0	0	0	1	0

Рис.3

Матрица инцидентности ориентированного графа.

Рассмотрим теперь матрицу инцидентности I_{ij} ориентированного графа. Принцип построения остается прежним, отличие заключается только в следующем :
- если вершина v_j начало ребра с номером i , то I_{ij} =-1;
- если вершина v_j конец ребра с номером i , то I_{ij} =1;
- если i -е ребро представляет собой петлю на j - й вершине, то I_{ij} =к (к - любое не равное нулю число);
- во всех остальных случаях I_{ij} =0.

Пример. Матрица инцидентности ориентированного графа.



		вершины						
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
ребра	**1**	-1	1	0	0	0	0	0
	2	-1	0	1	0	0	0	0
	3	0	-1	0	1	0	0	0
	4	0	0	-1	0	1	0	0
	5	0	0	-1	0	0	1	0
	6	0	0	-1	0	0	0	1
	7	0	0	0	0	0	0	2

Рис.4

МАТРИЦА СМЕЖНОСТИ ГРАФА.

Для неориентированного и ориентированного графов матрица смежности - это квадратная матрица S_{ij} столбцам и строкам которой соответствуют вершины графа. Для неориентированного графа элемент S_{ij} равен количеству ребер , инцидентных i - й и j - й вершинам. Для ориентированного графа этот элемент матрицы смежности равен количеству ребер с началом в i - й вершине и концом в j - й. Таким образом , матрица смежности неориентированного графа симметрична относительно главной диагонали, а ориентированного - не обязательно. Если она все же симметрична, то для каждого ребра ориентированного графа имеется ребро, соединяющее те же вершины, но идущее в противоположном направлении. Ориентированный граф с симметричной матрицей смежности канонически соответствует неориентированному графу, имеющему ту же матрицу смежности. Каждому графу можно поставить в соответствие матрицу смежности.

Справедливо и обратное. Матрица смежности определяет соответствующий неориентированный или ориентированный граф. Число его вершин равно размерности матрицы n, i - й и j - вершинам графа инцидентны S_{ij} ребер. Для неориентированного графа $S_{ij} = S_{ji}$ и все его ребра определяются верхним правым треугольником матрицы, расположенным над диагональю, включая и диагональ. Количество ребер равно сумме элементов S_{ij} по этому треугольнику. Ребра ориентированного графа определяются всеми элементами S_{ij} матрицы смежности.

Пример. Матрица смежности для неориентированного графа, приведенного на рис.3

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0	1	1	0	1	0	0
2	1	0	0	1	0	1	0
3	1	0	0	1	1	0	0
4	0	1	1	0	0	1	0
5	1	0	1	0	0	0	1
6	0	1	0	1	0	0	1
7	0	0	0	0	1	1	0

Номера столбцов и строк соответствуют номерам вершин. На пересечении соответствующей строки и столбца стоит единица, если между вершинами с теми же номерами имеется одно ребро. Если две вершины соединены несколькими ребрами, то ставится число равное количеству таких ребер.

Пример. Матрица смежности для ориентированного графа, приведенного на рис.4

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	1	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1

Номера строк соответствуют номерам вершин из которых выходят ребра, а номера столбцов соответствуют номерам вершин, в которые входят ребра. Например, третья строка указывает, что из вершины 3 ребра входят в вершины 4,5,6. Для петли единица стоит на главной диагонали - петля выходит из вершины 7 и входит в вершину 7.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГРАФОВ.

Один и тот же граф можно задать разными рисунками. Иногда трудно определить по рисункам, одинаковы ли графы. Вид графа в первую очередь зависит от нумерации вершин и ребер графа. Строго говоря, граф считается строго заданным, если нумерация его вершин зафиксирована.

Определение. Графы называются изоморфными, если они отличаются только нумерацией вершин.

Чтобы узнать, представляют ли две матрицы изоморфные графы, можно, например, произвести всевозможные перестановки строк и столбцов первой матрицы. Если после одной из этих перестановок возникнет матрица, тождественная второй, то графы изоморфны. Это громоздкий метод (подсчитайте сколько существует вариантов ?).

Определение. Пусть G - неориентированный граф. Количество p(v) ребер, инцидентных вершине $v \in G$ называется ее локальной степенью или просто степенью.

Определение. Вершина графа, имеющая степень 0, называется изолированной, а степень 1 - висячей.

Определение. Если степени всех вершин конечны, рассматриваемый граф G называется локально - конечным.

Если заданы матрицы смежности или инцидентности графа, можно определить локальные степени всех его вершин. Действительно, в j - м столбце, соответствующем вершине v_j, единицы стоят на пересечении со строками, которым соответствуют инцидентные этой вершине ребра, а остальные элементы столбца равны 0. Следовательно,

$$p(v_j) = \sum_{i=1}^{m} I_{ij} \qquad\qquad p(v_j) = \sum_{i=1}^{m} S_{ij}$$

ЧАСТИ, СУГРАФЫ И ПОДГРАФЫ.

Определение. Граф H называется частью графа G , если множество его вершин V(H) содержится в множестве V(G), а множество E(H) ребер - в E(G).

Определение. Если V(H)=V(G), часть графа называется суграфом.

Суграф H покрывает вершины неориентированного графа G (или является покрывающим), если любая вершина последнего инцидентна хотя бы одному ребру из H. Таким образом, если в графе G есть изолированная вершина v , не инцидентная ни одному ребру, покрывающие суграфы этого графа не существуют.

Определение. Подграфом G(U) графа G с множеством вершин $U \subset V$ называется часть, которой принадлежат все ребра с обоими концами из V.

Операции с частями графа.

Дополнение $\overline{H}$ части H определяется множеством всех ребер графа G, не принадлежащих H. Сумма $H_! \cup H_2$ и пересечение $H_! \cap H_2$ частей графа G определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
V(H_1 \cup H_2) &= V(H_1) \cup V(H_2) \\
E(H_1 \cup H_2) &= E(H_1) \cup E(H_2) \\
V(H_1 \cap H_2) &= V(H_1) \cap V(H_2) \\
E(H_1 \cap H_2) &= E(H_1) \cap E(H_2)
\end{aligned}$$

Две части не пересекаются по вершинам, если они не имеют общих вершин, а значит, и общих ребер. Сумма не пересекающихся по вершинам частей называется прямой суммой.

МАРШРУТЫ, ЦЕПИ И ЦИКЛЫ.

Определение. Маршрутом в неориентированном графе G называется такая конечная или бесконечная последовательность ребер, что каждые два соседние ребра имеют общую инцидентную вершину. Одно и то же ребро может встречаться в маршруте несколько раз.

Определение. Число ребер маршрута называется его длиной. Если первая вершина маршрута (начало) совпадает с конечной вершиной (конец) , то маршрут называется циклическим.

Определение. Маршрут М называется цепью, если каждое ребро в нем встречается не более одного раза, и простой цепью, если любая вершина графа G инцидентна не более чем двум его ребрам. Циклический маршрут называется циклом, если он является цепью, и простым циклом, когда это простая цепь.

СВЯЗНОСТЬ. КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ.

Определение. Две вершины называются связанными, если существует маршрут с началом в одной из них и концом в другой.

Определение. Граф (орграф) G называется связным, если все его вершины связаны между собой. Все подграфы связны и называются связными компонентами графа.

Определение. Орграф называется односторонне связным, если для любых двух его вершин по крайней мере одна из них достижима из другой.

Отношение связности вершин обладает свойством эквивалентности и определяет разбиение множества вершин графа на непересекающиеся подмножества V_i . Вершины одного и того же подмножества связаны друг с другом, а вершины разных подмножеств не связаны между собой. Поэтому в графе нет ребер с концами в разных подмножествах.

ЭЙЛЕРОВЫ ЦЕПИ И ЦИКЛЫ.

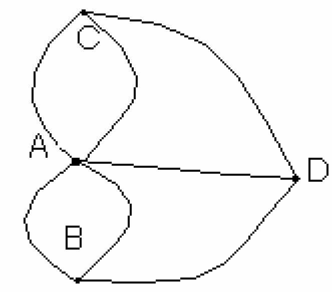


рис.5

В качестве примера рассмотрим задачу о Кенигсберсгких мостах. Попробуем обойти мосты. После того как мы пройдем какой - нибудь из них, нужно будет идти по мосту, связывающему часть города в которую мы попали, с некоторой другой частью. Следовательно, обходу мостов соответствует последовательность ребер графа задачи, в которой два соседних ребра имеют общую вершину, т.е. маршрут. Так как в конце обхода нужно вернуться в исходную часть города и на каждом мосту нужно побывать по одному разу, этот маршрут является простым циклом, содержащим все ребра графа.

Определение. Пусть G - псевдограф. Цепь или цикл в G называются Эйлеровыми, если они проходят по одному разу через каждое ребро псевдографа G. Эйлеров цикл можно считать следом пера, вычерчивающего этот граф, не отрываясь от бумаги.

Теорема Эйлера. Конечный неориентированный граф G Эйлеров тогда и только тогда, когда он связен и степени его вершин - четны.

В графе задачи о Кенигсбергских мостах все вершины имеют нечетную степень. Следовательно, ее решение невозможно.

ДЕРЕВЬЯ И ЦИКЛЫ.

Определение. Неориентированное дерево это связный неориентированный граф без циклов, а значит, без петель и кратных ребер. Несвязный (неориентированный) граф без циклов называется лесом. Связные компоненты леса являются деревьями.

Свойства деревьев.

Следующие утверждения эквивалентны:

1) граф G есть дерево;
2) граф G является связным и не имеет простых циклов;
3) граф G является связным и число его ребер ровно на единицу меньше числа вершин;
4) любые две различные вершины графа G можно соединить единственной (простой) цепью;
5) граф G не содержит циклов, но, добавляя к нему любое новое ребро, получаем ровно один с точностью до направления обхода и начальной вершины обхода и притом простой цикл проходящий через добавленное ребро.

Утверждение. Если у дерева G есть, по крайней мере, одно ребро, то у него обязательно найдется висячая вершина.

Утверждение. Пусть G - дерево с n вершинами и m ребрами. Тогда m=n-1.

Утверждение. Пусть G - дерево. Тогда любая цепь в G будет простой.

Определение. Пусть G - конечный неориентированный граф. Его цикломатическим число называется число

$$Y(G) = v_c + v_e - v_v$$

где v_c - число связных компонент графа;
v_e - число ребер графа;
v_v - число вершин графа.

Цикломатическое число дерева равно нулю. Цикломатическое число леса равно нулю.

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ.

1) Показать , что в любом графе количество вершин нечетной степени четно.
2) Показать, что из всякого замкнутого маршрута нечетной длины можно выделить простую цепь.
3) Показать, что ребро, входящее в цикл графа, входит в некоторый его простой цикл.
4) Показать, что любая вершина, входящая в цикл, не является висячей.
5) Показать, что у дерева G с числом n(G) большим или равным двум найдутся , по крайней мере, две висячие вершины.
6) Показать, что дерево, содержащее ровно две висячие вершины, является простой цепью.
7) Чем отличается матрица смежности для графа и орграфа?
8) Какая из перечисленных матриц симметрична относительно главной диагонали :
матрица смежности графа, матрица смежности оргграфа, матрица инцидентности графа, матрица инцидентности орграфа?
9) Какой цикл называется Эйлеровым?
10) Как вычисляется цикломатическое число графа ?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Кузнецов О.П., Адельсон - Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. М.: Энергия. 1980. - 344 с.
2. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. Учебное пособие для вузов. М.: Энергоатомиздат. 1987.- 496 с.
3. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. Киев: Техника, 1975. - 765 с.
4. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики: Учеб. пособие.- М.: Изд-во МАИ, 1992 г.- 264 с.