

# МАТЕМАТИКА

## ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ 2007 РОКУ З ВІДПОВІДЯМИ ТА КОМЕНТАРЯМИ

Тест зовнішнього незалежного оцінювання з математики перевіряє:

- відповідність знань, умінь і навичок учнів програмовим вимогам;
- рівень навчальних досягнень учнів;
- ступінь підготовленості випускників загальноосвітніх навчальних закладів до подальшого навчання у вищих навчальних закладах.

При укладанні тесту були використані підручники та посібники, рекомендовані Міністерством освіти і науки України для класів універсального, природничого, фізико-математичного профілів, а також для класів, шкіл, ліцеїв і гімназій математичного профілю та для спеціалізованих шкіл і класів з поглибленим вивченням математики.

### Частина 1

#### ЗАВДАННЯ З ВИБОРОМ ОДНІЄЇ ПРАВИЛЬНОЇ ВІДПОВІДІ

1. Розташуйте у порядку спадання числа  $\sqrt{5}$ ;  $2^{\log_2 5}$ ;  $\frac{5}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$2^{\log_2 5}$ ; $\frac{5}{2}$ ; $\sqrt{5}$	$\frac{5}{2}$ ; $\sqrt{5}$ ; $2^{\log_2 5}$	$\frac{5}{2}$ ; $2^{\log_2 5}$ ; $\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$ ; $\frac{5}{2}$ ; $2^{\log_2 5}$	$2^{\log_2 5}$ ; $\sqrt{5}$ ; $\frac{5}{2}$

Правильна відповідь: А.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Дійсні числа. Порівняння чисел. Основна логарифмічна тотожність.

2. Банк сплачує своїм вкладникам 8% річних. Визначте, скільки грошей треба покласти на рахунок, щоб через рік отримати 60 грн. прибутку.

А	Б	В	Г	Д
1150	1050	950	850	750

Правильна відповідь: Д.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Задачі на відсотки.

3. З натуральних чисел від 1 до 30 учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 30?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{7}{15}$

Правильна відповідь: В.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Поняття ймовірності випадкової події.

4. Розв'яжіть нерівність  $x + \frac{1}{x-3} > \frac{1}{x-3} - 2$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-2; 3)$	$(-2; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$	$(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$	$(-2; 3) \cup (3; +\infty)$

Правильна відповідь : Д.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Дробово-раціональні нерівності.

5. Знайдіть область визначення функції  $y = \sqrt{x+9}$ .

А	Б	В	Г	Д
$[3;+\infty)$	$[9;+\infty)$	$[-3;+\infty)$	$[-9;+\infty)$	$[-9;9]$

Правильна відповідь : Г.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Властивості елементарних функцій: область визначення.

6. Будівельна компанія закупила для нового будинку металопластикові вікна та двері у відношенні 4:1. Укажіть число, яким може виражатися загальна кількість вікон та дверей в цьому будинку.

А	Б	В	Г	Д
41	45	54	68	81

Правильна відповідь : Б.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Застосування ознак подільності чисел до розв'язування задач.

7. Обчисліть  $\sqrt{(2 \sin 45^\circ + 1)^2} - \sqrt{(1 - 2 \cos 45^\circ)^2}$ .

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	2

Правильна відповідь : Д.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Тотожні перетворення і знаходження значень виразів, що містять тригонометричні функції.

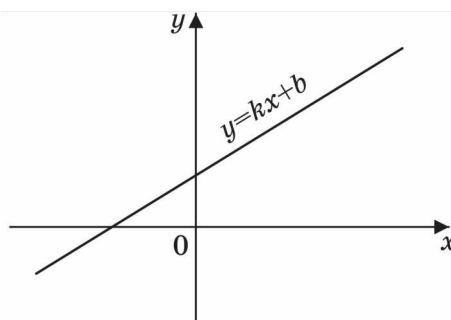
8. Розв'яжіть рівняння  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$	$\frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in Z$	$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$	інша відповідь

Правильна відповідь : Г.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

9. За видом графіка функції  $y = kx + b$  визначте знаки коефіцієнтів  $k$  і  $b$ .  
Оберіть правильне твердження.



А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} k > 0, \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k < 0, \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k < 0, \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k > 0, \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k = 0, \\ b > 0 \end{cases}$

Правильна відповідь : Г.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Лінійна функція та її властивості.

10. Укажіть парну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y = x$	$y = 2^x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \log_2 x$	$y = x^2$

Правильна відповідь : Д.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Властивості елементарних функцій: парність.

11. Обчисліть  $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt{5}$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Правильна відповідь : А.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Властивості логарифма.

12. Розв'яжіть нерівність  $\log_{0,1} 10 < \log_{0,1} x$ .

А	Б	В	Г	Д
$(10; +\infty)$	$(0; 10)$	$(0, 1; 10)$	$(-10; 0)$	$(-\infty; 10)$

Правильна відповідь : Б.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Розв'язування найпростіших логарифмічних нерівностей, використовуючи властивості логарифмічної функції.

13. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt[3]{8^x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{5}$

Правильна відповідь : Г.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Розв'язування найпростіших показникових рівнянь.

14. Укажіть, скільки дійсних коренів має рівняння  $x^3 - 4|x| = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	більше трьох

Правильна відповідь : В.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Розв'язування рівнянь з модулем.

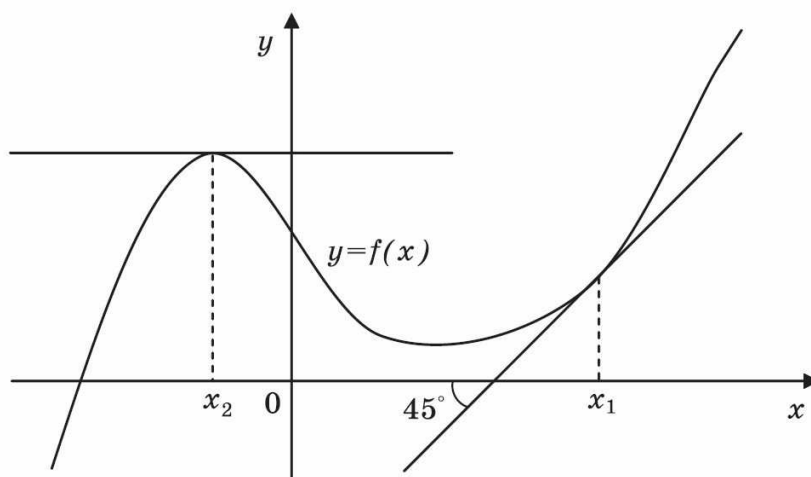
15. Знайдіть первісну функції  $f(x) = 2x + 2$ , графік якої проходить через точку з координатами (1;4).

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = x^2 + 2x$	$F(x) = x^2 + 2x + 1$	$F(x) = x^2 + 2x + 2$	$F(x) = x^2 + 2x - 4$	$F(x) = x^2 + 2x - 23$

Правильна відповідь : Б.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Первісна. Основна властивість первісної. Правила знаходження первісних.

16. На рисунку зображений графік функції  $y = f(x)$  та дотичні до нього в точках  $x_1$  та  $x_2$ . Користуючись геометричним змістом похідної, знайдіть  $f'(x_1) + f'(x_2)$ .

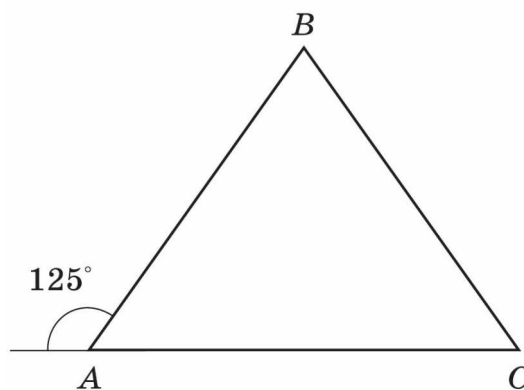


А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Правильна відповідь : А.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Геометричний зміст похідної.

17. Градусна міра зовнішнього кута  $A$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) становить  $125^\circ$ . Знайдіть градусну міру внутрішнього кута  $B$ .

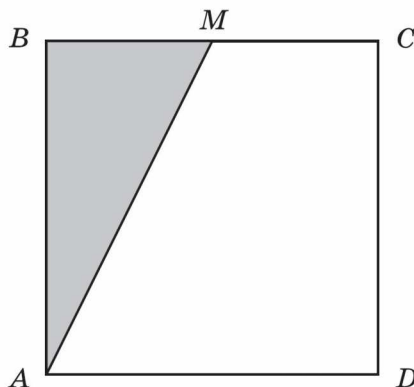


А	Б	В	Г	Д
$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$

Правильна відповідь : Д.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Властивість рівнобедреного трикутника. Сума кутів трикутника. Градусна міра кута.

18. Точка  $M$  – середина сторони квадрата  $ABCD$ . Площа зафарбованої частини дорівнює  $7 \text{ см}^2$ . Знайдіть площу всього квадрата.



А	Б	В	Г	Д
$14 \text{ см}^2$	$21 \text{ см}^2$	$28 \text{ см}^2$	$35 \text{ см}^2$	$42 \text{ см}^2$

Правильна відповідь : В.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Властивості квадрата. Площі рівних фігур.

19. Знайдіть координати точки  $M$ , відносно якої симетричні точки  $E(-3; 8; 7)$  і  $F(-9; 6; 1)$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-6; 7; 4)$	$(-12; 14; 8)$	$(0; 0; 0)$	$(3; 1; 3)$	інша відповідь

Правильна відповідь : А.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Координати точки та симетрія відносно точки у просторі.

20. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням круга навколо свого діаметра, довжина якого дорівнює  $a \text{ см}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{3} \pi a^3 \text{ см}^3$	$\frac{2}{3} \pi a^3 \text{ см}^3$	$\frac{1}{3} \pi a^3 \text{ см}^3$	$\frac{1}{6} \pi a^3 \text{ см}^3$	$\frac{1}{12} \pi a^3 \text{ см}^3$

Правильна відповідь : Г.

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Знаходження об'єму тіла обертання.

## Частина 2

### ЗАВДАННЯ ВІДКРИТОЇ ФОРМИ З КОРОТКОЮ ВІДПОВІДДЮ

21. Обчисліть  $(\sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{64})(\sqrt[3]{27} - \sqrt[4]{64})$

Правильна відповідь :  $-5$ .

Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Дії над ірраціональними числами.

**22.** Знайдіть суму перших дванадцяти непарних натуральних чисел.  
 Правильна відповідь : 144.  
 Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Сума членів арифметичної прогресії.

**23.** Укажіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності  

$$\frac{(x-3)(x+10)(x^2+8x-9)}{x^2+8x-9} < 0$$
  
 Правильна відповідь :  $-8$ .  
 Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Розв'язування раціональних нерівностей методом інтервалів.

**24.** На перегоні, довжина якого дорівнює 240 км, поїзд рухався зі швидкістю на 10 км/год менше, ніж мала бути за розкладом, і запізнівся на 48 хв. З якою швидкістю мав рухатися поїзд за розкладом?  
 Правильна відповідь : 60 км/год.  
 Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Розв'язування текстових задач за допомогою рівняння або системи рівнянь.

**25.** Обчисліть  $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ$ .  
 Правильна відповідь : 0,5  
 Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Тотожні перетворення і знаходження значень тригонометричних виразів.

**26.** Розв'яжіть рівняння  $(x^2 - 9)\sqrt{-15 + 8x - x^2} = 0$ . У відповідь запишіть суму коренів.  
 Правильна відповідь : 11 (або 8).  
 Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Розв'язування ірраціональних рівнянь.  
**Примітка.** Враховуючи, що чинні підручники з математики для загальноосвітніх навчальних закладів по-різному тлумачать ситуацію, коли рівняння мають кратні корені, відповідь 8 також є правильною.

Розв'язання.

Знайдемо область визначення:  $-15 + 8x - x^2 \geq 0$ ,  $x^2 - 8x + 15 \leq 0$ ,  $x \in [3; 5]$

Рівняння  $(x^2 - 9)\sqrt{-15 + 8x - x^2} = 0$  рівносильне сукупності рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - 9 = 0, \\ \sqrt{-15 + 8x - x^2} = 0; \end{cases} \text{ звідси: } \begin{cases} x_1 = -3, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 3, \\ x_4 = 5. \end{cases}$$

Рівняння має чотири корені, з яких два рівні між собою. Корінь  $x = -3$  не входить в область визначення. Тому  $3+3+5=11$ .

**27.** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} 2^{2y-x} = 32, \\ \log_{\frac{1}{2}}(y-x) = -2. \end{cases}$$

Запишіть у відповідь добуток  $x_0 \cdot y_0$ , якщо пара  $(x_0, y_0)$  є розв'язком вказаної системи рівнянь.

Правильна відповідь :  $-3$ .  
 Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Розв'язування систем рівнянь, у яких одне рівняння показникове, а інше — логарифмічне.

28. Середній вік одинадцяти футболістів команди становить 22 роки. Під час гри одного з футболістів було вилучено з поля, після чого середній вік гравців, що залишилися, став 21 рік. Скільки років футболісту, який залишив поле?

Правильна відповідь : 32.

*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Статистичні характеристики рядів даних: середнє значення випадкової величини.*

29. Обчисліть  $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 81$

Правильна відповідь : 4.

*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Тотожні перетворення логарифмічних виразів.*

30. Знайдіть найбільше ціле значення параметра  $a$ , при якому система рівнянь

$$\begin{cases} y - x = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ має два розв'язки.}$$

Правильна відповідь : 1.

*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Розв'язування систем рівнянь з параметрами графічно.*

31. Знайдіть найбільше значення функції  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  на проміжку  $[-1; 1]$ .

Правильна відповідь : 2.

*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Дослідження функції за допомогою похідної.*

32. Знайдіть найменше ціле значення параметра  $a$ , при якому рівняння  $\log_8(x + 2) = \log_8(2x - a)$  має корені.

Правильна відповідь :  $-3$ .

*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Розв'язування рівнянь з параметрами.*

33. Сторона рівностороннього трикутника  $ABC$  дорівнює 5 см. Знайдіть скалярний добуток  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

Правильна відповідь : 12,5.

*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Скалярний добуток векторів.*

34. Для опалювальної системи будинку необхідні радіатори із розрахунку: три одиниці на  $50\text{м}^3$ . Яку кількість одиниць радіаторів треба замовити, якщо новий будинок має форму прямокутного паралелепіпеда розміру  $15\text{м} \times 18\text{м} \times 25\text{м}$ ?

Правильна відповідь : 405.

*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Задачі прикладного змісту на знаходження об'єму фігур: об'єм прямокутного паралелепіпеда.*

35. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $2\sqrt{3}$  см і нахилена під кутом  $60^\circ$  до площини основи. Знайдіть об'єм піраміди.

Правильна відповідь :  $12\text{ см}^3$ .

*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: Знаходження об'єму фігури, використовуючи теореми планіметрії: об'єм піраміди.*

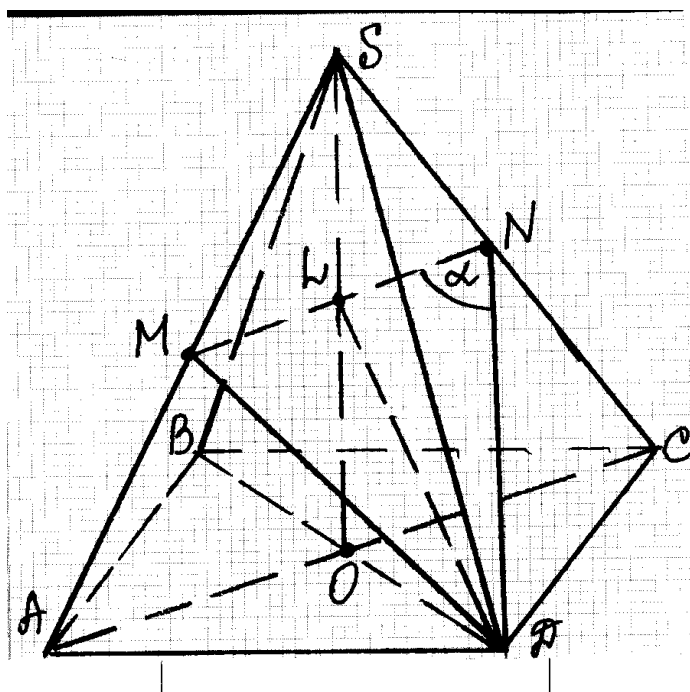
### Частина 3

#### ЗАВДАННЯ ВІДКРИТОЇ ФОРМИ З РОЗГОРНУТОЮ ВІДПОВІДДЮ

36. У правильній чотирикутній піраміді  $SABCD$  ( $S$  – вершина) бічне ребро вдвічі більше сторони основи. Знайдіть кут між медіаною трикутника  $SDC$ , проведеною з вершини  $D$ , та середньою лінією трикутника  $ASC$ , що паралельна основі піраміди.

Правильна відповідь :  $\alpha = \arctg\sqrt{11}$ .

Розв'язання (авторський варіант)



Нехай  $SABCD$  – задана правильна піраміда, в основі якої лежить квадрат  $ABCD$ , і  $SO$  її висота. Позначимо сторону основи  $AB$  через  $a$ , тоді бічне ребро  $SA = 2a$ .

У трикутнику  $SDC$  з вершини  $D$  проведемо медіану  $DN$ ,  $N$  – середина ребра  $SC$ . У трикутнику  $ASC$  проведемо середню лінію, паралельну  $AC$ . Вона перетинає ребра  $SA$  та  $SC$  у точках  $M$  та  $N$  відповідно,  $AM = MS$  та  $SN = NC$  (за означенням середньої лінії). Оскільки  $AC$  лежить у площині  $ABC$  і  $MN \parallel AC$ , то  $MN \parallel (ABC)$ . Прямі  $MN$  та  $ND$  перетинаються в точці  $N$ , тому кут  $MND$  є шуканим кутом між медіаною  $DN$  трикутника  $SDC$  і середньою лінією  $MN$  трикутника  $ASC$ . Позначимо  $\angle MND = \alpha$ .

Діагональ  $AC$  квадрата  $ABCD$  дорівнює  $a\sqrt{2}$ , тому середня лінія  $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Висота  $SO$  піраміди перетинає  $MN$  в точці  $L$ . Оскільки трикутники  $ASC$  і  $SMN$  є рівнобедреними, то  $AO = OC$  і  $ML = LN = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ .



З прямокутного трикутника  $SOC$   $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{2a^2}{4}} = a\sqrt{\frac{7}{2}}$ .

За теоремою Фалеса  $SL = LO = \frac{1}{2}SO = a\sqrt{\frac{7}{8}}$ .

З прямокутного трикутника  $LOD$   $LD = \sqrt{OD^2 + LO^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{7a^2}{8}} = a\sqrt{\frac{11}{8}}$ .

Трикутник  $DNM$  рівнобедрений, оскільки  $DM = DN$  як медіани рівних трикутників  $SAD$  та  $SCD$ . Медіана  $DL$  є висотою. Отже, трикутник  $DLN$  є прямокутним.

З трикутника  $DLN$  маємо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{LD}{LN} = \sqrt{11}.$$

**Відповідь.**  $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{11}$ .

### Схема оцінювання

1. За правильно побудований рисунок до задачі з обґрунтуванням паралельності відповідної середньої лінії до основи учень одержує **1 бал**.
2. За обґрунтування рівності двох сторін трикутника  $MND$  ( $DM=DN$ ) учень одержує ще **1 бал**.
3. Якщо учень правильно знайшов елементи трикутника  $DLN$ , необхідні для знаходження кута  $\alpha$ , він одержує ще **1 бал**.
4. За правильну відповідь учень одержує ще **1 бал**.

Таким чином, за правильно розв'язану задачу учень одержує **4 бали**.

- Якщо учень не з'єднає точки  $M$  і  $D$  на рисунку, а розглядає кут  $\alpha$  як кут трикутника  $DLN$ , то в цьому випадку треба обґрунтувати, що трикутник  $DLN$  – прямокутний. Тоді має місце така **схема оцінювання** :

1. За правильно побудований рисунок до задачі з обґрунтуванням паралельності відповідної середньої лінії до основи учень одержує **1 бал**.
2. За обґрунтування того, що  $LD \perp MN$  учень одержує ще **1 бал**.
3. Якщо учень правильно знайшов елементи трикутника  $DLN$ , необхідні для знаходження кута  $\alpha$ , він одержує ще **1 бал**.
4. За правильну відповідь учень одержує ще **1 бал**.

Таким чином, за правильно розв'язану задачу учень одержує **4 бали**.

- Якщо учень для розв'язування задачі використав векторно-координатний метод, то тоді має місце така **схема оцінювання** :

1. За правильне обґрунтування висоти  $SO$  учень одержує **1 бал**.
2. За вибір системи координат з поясненням необхідних точок учень одержує ще **1 бал**.
3. За обчислення координат цих точок учень одержує ще **1 бал**.
4. За правильну відповідь учень одержує ще **1 бал**.

Таким чином, за правильно розв'язану задачу учень одержує **4 бали**.

37. Побудуйте графік функції  $y = \frac{\sqrt{-x} + |4 - \sqrt{-x}|}{2}$ .

## Розв'язання

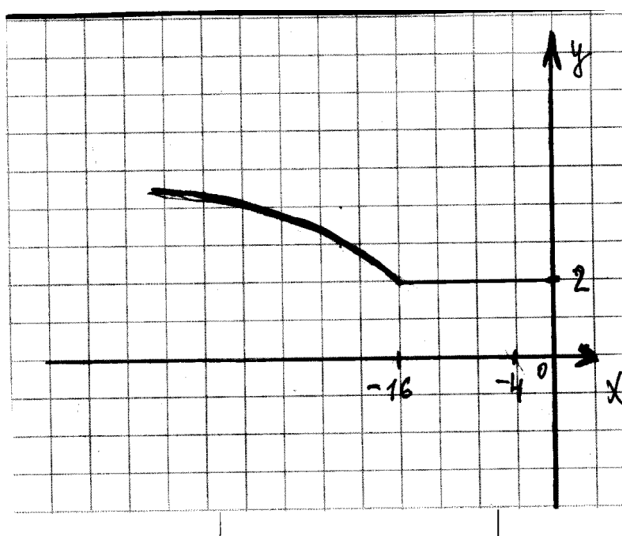
Знаходимо область визначення функції, тобто розв'язуємо нерівність  $-x \geq 0$ . Отже,  $D(y) = (-\infty; 0]$ .

Знайдемо точки, у яких модуль обертається в нуль, тобто розв'яжемо рівняння  $4 - \sqrt{-x} = 0$ , звідки  $x = -16$ .

$$\text{Якщо } x \in (-\infty; -16], \text{ то } y = \frac{\sqrt{-x} - (4 - \sqrt{-x})}{2} = \frac{2\sqrt{-x} - 4}{2} = \sqrt{-x} - 2.$$

$$\text{Якщо } x \in (-16; 0], \text{ то } y = \frac{\sqrt{-x} + 4 - \sqrt{-x}}{2} = 2.$$

Побудуємо ескіз графіка вказаної функції.



## Схема оцінювання

1. За правильно знайдене  $D(y)$  учень одержує **1 бал**.
2. Якщо учень правильно розкрив модуль на проміжку  $x \in (-\infty; -16]$ , то він одержує **1 бал**.
3. Якщо учень правильно розкрив модуль на проміжку  $(-16; 0]$ , то він одержує ще **1 бал**.
4. За правильно побудований ескіз графіка вказаної функції учень одержує ще **1 бал**.  
Тобто за правильно розв'язане завдання учень одержує **4 бали**.

**38. Розв'яжіть нерівність**  $(x^2 - 2\sqrt{a} \cdot x + 1)(2^x + \lg a) < 0$ .

Правильна відповідь: при  $a \in (0; 1)$   $x \in (-\infty; \log_2 \lg \frac{1}{a})$ ;

при  $a = 1$   $x \in \emptyset$ ;

при  $a \in (1; +\infty)$   $x \in (\sqrt{a} - \sqrt{a-1}; \sqrt{a} + \sqrt{a-1})$ .

## Розв'язання

Визначимо область допустимих значень параметра  $a$ :  $a > 0$ .

Дана нерівність еквівалентна наступній сукупності систем нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - 2x\sqrt{a} + 1 > 0, \\ 2^x + \lg a < 0; \\ x^2 - 2x\sqrt{a} + 1 < 0, \\ 2^x + \lg a > 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо спочатку першу систему.

Розглянемо нерівність  $x^2 - 2\sqrt{a} \cdot x + 1 > 0$ .

$$\frac{D}{4} = (\sqrt{a})^2 - 1 = a - 1.$$

1. Якщо  $a < 1$ , то розв'язком першої нерівності даної системи буде  $x \in R$ . Тоді розв'язком нерівності  $2^x < -\lg a$  буде  $x \in (-\infty; \log_2 \lg \frac{1}{a})$  при  $0 < a < 1$ . Тобто, розв'язок першої системи матиме вигляд  $x \in (-\infty; \log_2 \lg \frac{1}{a})$  при  $0 < a < 1$ .
2. Якщо  $a \geq 1$ , то розв'язком нерівності  $x^2 - 2\sqrt{a} \cdot x + 1 > 0$  буде  $x \in (-\infty; \sqrt{a} - \sqrt{a-1}) \cup (\sqrt{a} + \sqrt{a-1}; +\infty)$ , а нерівність  $2^x < -\lg a$  не має розв'язків. Отже, перша система не має розв'язків.

Розв'яжемо другу систему.

Розглянемо нерівність  $x^2 - 2\sqrt{a} \cdot x + 1 < 0$ .

Ураховуючи розв'язання попередньої системи,  $\frac{D}{4} = (\sqrt{a})^2 - 1 = a - 1$ .

1. Якщо  $a < 1$ , то нерівність не має розв'язків. Отже, друга система не має розв'язків.
  2. Якщо  $a > 1$ , то розв'язком нерівності  $x^2 - 2\sqrt{a} \cdot x + 1 < 0$  буде  $x \in (\sqrt{a} - \sqrt{a-1}; \sqrt{a} + \sqrt{a-1})$ . Тоді розв'язком нерівності  $2^x > -\lg a$  буде  $x \in R$ . Тобто розв'язок другої системи матиме вигляд  $x \in (\sqrt{a} - \sqrt{a-1}; \sqrt{a} + \sqrt{a-1})$ .
  3. Якщо  $a = 1$ , то одержимо нерівність  $x^2 - 2x + 1 < 0$ , звідси  $x \in \emptyset$ .
- Отже, загальна відповідь: при  $0 < a < 1$   $x \in (-\infty; \log_2 \lg \frac{1}{a})$ ;

$$\begin{aligned} &\text{при } a > 1 \quad x \in (\sqrt{a} - \sqrt{a-1}; \sqrt{a} + \sqrt{a-1}); \\ &\text{при } a = 1 \quad x \in \emptyset. \end{aligned}$$

### Схема оцінювання

1. Якщо учень правильно знайшов область допустимих значень параметра  $a$  і розглянув нерівність як сукупність двох систем, то він одержує **1 бал**.
2. За правильно розв'язану першу систему нерівностей учень одержує ще **2 бали**. Якщо він припустився помилки при розв'язанні однієї з нерівностей при умові, що друга нерівність розв'язана правильно, учень одержує **1 бал**.
3. За правильно розв'язану другу систему нерівностей учень одержує ще **2 бали**. Якщо він припустився помилки при розв'язанні однієї з нерівностей при умові, що друга нерівність розв'язана правильно, учень одержує **1 бал**.
4. За правильно записану відповідь учень одержує ще **1 бал**. Тобто за правильно розв'язану задачу учень одержує **6 балів**.

- Якщо учень розв'язує нерівність *методом інтервалів*, то в цьому випадку має місце така **схема оцінювання**:

1. За правильно знайдене ОДЗ змінної і параметра учень одержує **1 бал**.
2. За правильно знайдені нулі функції  $y = (x^2 - 2\sqrt{ax+1})(2^x + \lg a)$  з вказівкою відповідних значень параметра учень одержує **2 бали**.  
Якщо знайдені нулі тільки одного множника з вказівкою відповідних значень параметра, то учень одержує лише **1 бал**.
3. За правильне застосування методу інтервалів на кожному з виділених проміжків для параметра  $a$  учень одержує **2 бали**.  
Якщо учень розглянув один з випадків  $a > 1$  або  $0 < a < 1$ , то він одержує лише **1 бал**.
4. За правильно записану відповідь учень одержує ще **1 бал**.  
Тобто за правильно розв'язану задачу учень одержує **6 балів**.

- Якщо учень розв'язує нерівність *методом розбиття усіх значень  $a$  на три випадки*:  $0 < a < 1$ ,  $a = 1$ ,  $a > 1$ , то в цьому випадку має місце така **схема оцінювання**:

1. Якщо учень дослідив випадок  $a = 1$  і одержав відповідь, то він одержує **1 бал**.
2. Якщо учень дослідив випадок  $0 < a < 1$  і одержав відповідь, то він одержує **2 бали**.
3. Якщо учень дослідив випадок  $a > 1$  і одержав відповідь, то він одержує **2 бали**.
4. За правильно записану відповідь учень одержує ще **1 бал**.  
Тобто за правильно розв'язану задачу учень одержує **6 балів**.