

Высшая математика. Лекции по курсу.

Список литературы

- [1] Высшая математика для экономистов. Под редакцией Н.Ш. Кремера.
- [2] С.А. Минюк, Е.А. Ровба. Высшая математика.
- [3] Сборник задач по высшей математике для экономистов. Под редакцией В.И. Ермакова.
- [4] Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Под редакцией А.П. Рябушко.

Содержание

1	Линейная алгебра	1
	Матрицы	1
	Действия над матрицами	1
	Определители	2
	Свойства определителей	2
	Обратная матрица	3
	Решение систем линейных уравнений	3
	Модель Леонтьева многоотраслевой экономики	4
2	Аналитическая геометрия	4
	Уравнения прямой	4
	Угол между прямыми	5
	Различные уравнения	5
	Пересечение прямых	5
	Расстояние от точки до прямой	5
3	Предел	5
	Числовая последовательность	5
	Предел последовательности	6
	Понятие функции	6
	Предел функции	6
	Замечательные пределы	7
4	Теория дифференцирования	7
	Понятие производной	7
	Задачи, приводящие к понятию производной	8
	Правила дифференцирования	9
	Дифференциал функции	9
	Производные высших порядков	9
	Правило Лопиталья	10
	Монотонность и экстремум функции	10
	Исследование функций и построение их графиков	10
	Понятие эластичности функции	11
5	Неопределённый интеграл	11
	Первообразная и неопределённый интеграл	11
	Свойства неопределённого интеграла	12
	Метод замены переменной	12
	Метод интегрирования по частям	13
	Интегрирование тригонометрических функций	14
6	Определённый интеграл	14
	Понятие определённого интеграла	14
	Формула Ньютона—Лейбница	14
	Замена переменной в определённом интеграле	15
	Формула интегрирования по частям	15
	Вычисление площадей плоских фигур	15

1 Линейная алгебра

Матрицы. Прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов, называется матрицей размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент снабжается двумя индексами: первый указывает номер строки, а второй — номер столбца, в которых расположен этот элемент.

Две матрицы называются *равными*, если числа их строк и столбцов равны и если равны элементы, расположенные на соответствующих местах этих матриц. Матрица называется *нулевой*, или *нуль-матрицей*, если все её элементы равны нулю.

Если число столбцов матрицы n равно числу её строк, то матрицу называют *квадратной матрицей порядка n* . Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы порядка n образуют её *главную диагональ*. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все её элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю. Диагональная матрица называется *единичной*, если все её элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно квадратная, диагональная и единичная матрицы третьего порядка.

Действия над матрицами. Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций, причём некоторые из них аналогичны операциям над числами, а некоторые — специфические.

Чтобы *умножить матрицу на число*, надо каждый элемент матрицы умножить на это число. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Суммой матриц A и B одинаковых размерностей называется матрица, элементы которой равны сумме элементов матриц A и B , расположенных на соответствующих местах. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой равно числу строк второй. При этом *произведением* матрицы A порядка $m \times k$ на матрицу B порядка $k \times n$ называется матрица C порядка $m \times n$, элементы c_{ij} которой вычисляются как сумма произведений элементов i -ой строки матрицы A и j -го столбца матрицы B :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^k a_{is}b_{sj}.$$

Пример 1. Вычислить произведение матриц A и B , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению находим элементы матрицы AB как произведение соответствующих строки и столбца матриц A и B .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Операции над матрицами обладают следующими свойствами:

- 1) $A + B = B + A$, 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- 3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, 4) $A(B + C) = AB + AC$,
- 5) $(A + B)C = AC + BC$, 6) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$,
- 7) $A(BC) = (AB)C$, 8) $AE = EA = A$,

где E , как обычно, единичная матрица. Следующий пример показывает, что коммутативный (переместительный) закон умножения для матриц, вообще говоря, не выполняется.

Пример 2. Найти произведения AB и BA , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 6 & 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 24 & 47 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \\ 6 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 6 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix},$$

то есть $AB \neq BA$. \square

По аналогии с числами вводим понятие степени матрицы A :

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m \text{ раз}}.$$

По определению считают, что $A^0 = E$. Операция возведения в степень обладает следующими свойствами:

$$A^m \cdot A^k = A^{m+k}, \quad (A^m)^k = A^{mk}.$$

Переход от матрицы A к матрице A' , в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка, называется транспонированием матрицы A . Матрица A' называется транспонированной относительно матрицы A . Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операция транспонирования обладает следующими свойствами:

- 1) $(A')' = A$, 2) $(\lambda A)' = \lambda A'$,
- 3) $(A + B)' = A' + B'$, 4) $(AB)' = B'A'$.

Определители. Определителем матрицы второго порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Определителем матрицы третьего порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (1)$$

Знаки, с которыми слагаемые входят в формулу (1), легко запомнить, пользуясь правилом треугольника. Определитель квадратной матрицы A обозначается $|A|$ или $\det A$.

Пример 3. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$|A| = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2 + 2 - 1 - 1 + 4 - 1 = 5. \quad \square$$

Введём понятие определителя произвольного порядка n . Для этого понадобятся следующие определения.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка, который получается вычёркиванием в данном определителе строки и столбца, содержащих элемент a_{ij} . Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Если например,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & 8 & 9 & 11 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

то

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

Известно, что каждый определитель равен сумме произведений любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения, то есть

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad (2)$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \quad (3)$$

Равенства (2) и (3) называются соответственно разложениями определителя матрицы по элементам i -й строки и j -го столбца. Формулы (2) и (3) применяются для вычисления определителей матриц.

Пример 4. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Разложим данный определитель по элементам его третьего столбца.

$$\begin{aligned} |A| &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} = \\ &= (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -3 \cdot (0 + 2 + 20 - 5 - 8 - 0) - \\ &- 1 \cdot (4 + 2 + 8 - 1 - 8 - 8) = \\ &= -3 \cdot 9 - 1 \cdot (-3) = -24. \quad \square \end{aligned}$$

Свойства определителей. Вычисление определителя с помощью разложения по строке или столбцу — достаточно трудоёмкое дело. Используя свойства определителя, можно значительно упростить его вычисление.

- 1) При транспонировании матрицы её определитель не меняется, то есть

$$|A'| = |A|.$$

Решение. Избавимся от переменной x во втором и третьем уравнениях. Для этого сначала домножим первое уравнение на -1 и прибавим ко второму, а потом домножим первое на 2 и прибавим к третьему.

$$\begin{cases} x - y + z = 6, \\ x - 2y + 3z = 17, \\ -2x - 3y - 5z = -9, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z = 6, \\ -y + 2z = 11, \\ -5y - 3z = 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 6, \\ -y + 2z = 11, \\ -13z = -52. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} z &= 4, \\ y &= 2z - 11 = 8 - 11 = -3, \\ x &= 6 + y - z = 6 - 3 - 4 = -1. \end{aligned}$$

Для сокращения письма и придания решению большей наглядности можно проделать те же преобразования с расширенной матрицей системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 17 \\ -2 & -3 & -5 & -9 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 11 \\ 0 & -5 & -3 & 3 \end{array} \right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -13 & -52 \end{array} \right). \quad \square$$

Если обозначить матрицу системы через A , а столбец свободных членов и столбец переменных через B и X соответственно, то получится *матричный* вид системы линейных уравнений:

$$AX = B.$$

Домножив это равенство слева на A^{-1} , получим

$$X = A^{-1}B.$$

Это соотношение даёт нам новый способ решения систем линейных уравнений. Однако этот способ требует отыскания обратной матрицы и потому является менее эффективным, чем рассмотренный выше метод Гаусса.

Пример 8. Решить систему.

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 11x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение. Поменяв местами первую и вторую строки, запишем расширенную матрицу системы. Затем исключим переменную x_3 из второго и третьего уравнения.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 5 & 3 & 10 \\ 11 & 9 & 4 & 8 & 8 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ -15 & -9 & 0 & -12 & 0 \\ -5 & -3 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ -5 & -3 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Так как уравнение $0 = 0$ всегда верно, его можно просто отбросить. В итоге получим расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{5}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4, \\ x_3 &= -4x_1 - 3x_2 - 3x_4 + 2 = \\ &= -4x_1 - 3\left(-\frac{5}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_4\right) - 3x_4 + 2 = x_1 + x_4 + 2. \end{aligned}$$

Положив $x_1 = 3a$ и $x_4 = 3b$, получим

$$x_1 = 3a, \quad x_2 = -5a - 4b, \quad x_3 = 3a + 3b + 2, \quad x_4 = 3b. \quad \square$$

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.

Пусть имеется n отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идёт на внутрипроизводственное потребление данной отрасли и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного (вне сферы материального производства) личного и общественного потребления.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени (например, год). Введём следующие обозначения:

x_i — общий (валовый) объём продукции i -ой отрасли;

a_{ij} — коэффициенты прямых затрат, показывающие затраты продукции i -ой отрасли на производство единицы продукции j -ой отрасли;

y_i — объём конечного продукта i -ой отрасли для внутреннего потребления.

Так как валовый объём продукции i -ой отрасли равен суммарному объёму её продукции, потребляемой всеми отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Уравнения (5) называются *соотношениями баланса*.

Основная задача межотраслевого баланса состоит в отыскании такого валового объёма продукции для каждой из отраслей, который при известных прямых затратах обеспечивает заданный конечный продукт. Для её решения достаточно решить систему линейных алгебраических уравнений (5).

2 Аналитическая геометрия

Уравнения прямой. Прямая есть геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

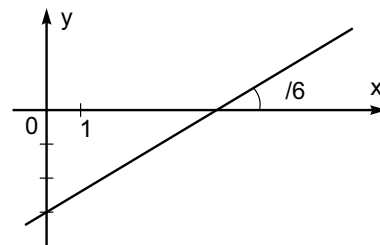
$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0).$$

Если $B = 0$, то уравнение прямой принимает вид $x = -C/A$. В противном случае, деля обе части уравнения на B , получим уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b,$$

где b — ордината точки пересечения прямой с осью OY , k — тангенс угла, образованного прямой с OX .

Пример 1. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b = -3$ и образующей с положительным направлением оси OX угол $\alpha = \pi/6$.



Решение. Так как $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \pi/6 = 1/\sqrt{3}$, то уравнение прямой принимает вид

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 3. \quad \square$$

Угол между прямыми.

$$y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2$$

вычисляется из формулы

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|.$$

Отсюда же усматривается, что

$k_1 = k_2$ есть условие параллельности двух прямых;

$k_1 = -1/k_2$ есть условие перпендикулярности двух прямых.

Различные уравнения. Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ имеет вид

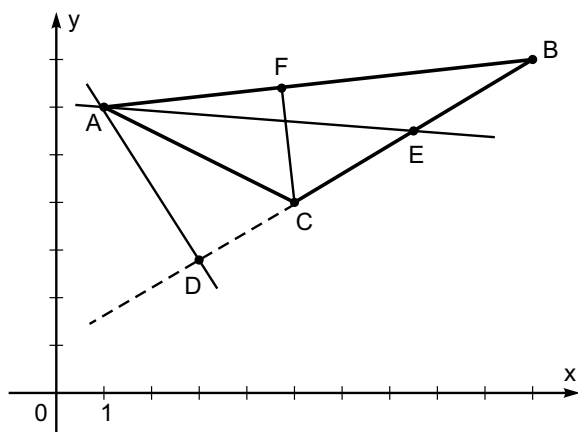
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

При этом угловой коэффициент такой прямой равен

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (2)$$

Если $x_1 = x_2$, то прямая задаётся уравнением $x = x_1$. Если $y_1 = y_2$, то прямая задаётся уравнением $y = y_1$.

Пример 2. Даны вершины $A(1, 6)$, $B(10, 7)$ и $C(5, 4)$ треугольника ABC . Найти уравнение медианы AE .



Решение. Находим координаты точки E как середины отрезка BC .

$$E = \left(\frac{10 + 5}{2}, \frac{7 + 4}{2} \right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{11}{2} \right).$$

Составляем уравнение прямой, проходящей через точки A и E (которая и является искомой медианой), по формуле (1).

$$\frac{y - 6}{\frac{11}{2} - 6} = \frac{x - 1}{\frac{15}{2} - 1}, \quad \frac{y - 6}{-\frac{1}{2}} = \frac{x - 1}{\frac{13}{2}}, \quad \frac{y - 6}{-1} = \frac{x - 1}{13},$$

$$13(y - 6) = -1(x - 1), \quad x + 13y - 79 = 0. \quad \square$$

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $M(x_1, y_1)$ имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (3)$$

Пример 3. В треугольнике ABC из примера 2 найти уравнение высоты AD .

Решение. По формуле (2) вычислим угловой коэффициент k_{BC} прямой BC .

$$k_{BC} = \frac{4 - 7}{5 - 10} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}.$$

Тогда из условия перпендикулярности двух прямых следует, что

$$k_{AD} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}.$$

По формуле (3) находим теперь искомое уравнение.

$$y - 6 = -\frac{5}{3}(x - 1), \quad 3(y - 6) = -5(x - 1), \quad 5x + 3y - 23 = 0, \quad \square$$

Пересечение прямых. Для нахождения точки пересечения прямых

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

достаточно решить систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Если решение единственное, то прямые пересекаются. Если решений нет, то прямые параллельны. Если же решений бесконечно много, то прямые совпадают.

Расстояние от точки до прямой. Пусть даны точка $M(x_0, y_0)$ и прямая $Ax + By + C = 0$. Тогда расстояние между ними определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (4)$$

Пример 4. В треугольнике ABC из примера 2 найти длину высоты CF .

Решение. По формуле (1) найдём уравнение прямой AB .

$$\frac{y - 6}{7 - 6} = \frac{x - 1}{10 - 1}, \quad \frac{y - 6}{1} = \frac{x - 1}{9}, \\ 9(y - 6) = 1(x - 1), \quad x - 9y + 53 = 0.$$

Таким образом, для прямой AB

$$A = 1, \quad B = -9, \quad C = 53,$$

и мы можем воспользоваться формулой (4).

$$CF = d = \frac{|1 \cdot 5 - 9 \cdot 4 + 53|}{\sqrt{1^2 + (-9)^2}} = \frac{|5 - 36 + 53|}{\sqrt{1 + 81}} = \frac{22}{\sqrt{82}}. \quad \square$$

3 Предел

Числовая последовательность. Пусть \mathbb{N} — множество натуральных чисел. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n , то говорят, что определена *числовая последовательность* $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Числа x_n , где $n \in \mathbb{N}$, называют *элементами* или *членами* последовательности. Числовую последовательность (в дальнейшем последовательность) будем ещё записывать в виде $\{x_n\}$, а выражение x_n называть *общим членом* последовательности, n — номером члена.

Последовательности встречались уже в средней школе, например, бесконечная геометрическая прогрессия $1, q, q^2, \dots, q^n, \dots$, где $q < 1$ является числовой последовательностью.

Последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n / y_n\}$ называются соответственно *суммой*, *разностью*, *произведением* и *частным* двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ (для частного $y_n \neq 0$ для $n \in \mathbb{N}$).

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \leq M$.

В этом определении, а также в формулировках многих других определений и теорем используются слова «существует» и «для любого». Для краткости записи вместо этих терминов будем использовать символы соответственно \exists и \forall . Символ \exists называют *квантором существования*, а символ \forall — *квантором общности*. С помощью указанных символов определение ограниченной последовательности выглядит следующим образом: последовательность x_n называется ограниченной, если $\exists M > 0$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N} |x_n| \leq M$.

Пример 1. Последовательность

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \dots$$

ограничена, так как $\forall n \in \mathbb{N} |x_n| = 1/n \leq 1$.

Последовательность

$$1, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$$

является неограниченной, так как каково бы ни было число $M > 0$ найдётся такое $x_n = n^2$, что $x_n > M$.

Предел последовательности. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall n > N_0 |x_n - a| < \varepsilon$. Для обозначения предела используется выражение

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а последовательность, не имеющая предела, — *расходящейся*.

Например,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

так как при возрастании n выражение $1/n$ становится как угодно малым.

Приведем основные свойства сходящихся последовательностей.

- 1) Сходящаяся последовательность имеет только один предел.
- 2) Сходящаяся последовательность ограничена. Однако ограниченная последовательность не обязательно сходится. Например, последовательность

$$1, -1, 1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$$

ограниченна, но расходится.

- 3) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тогда:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b,$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab,$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \quad (\text{при условии, что } b \neq 0).$$

Пример 2. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n + 1}{n^2 - 1}$.

Решение. При $n \rightarrow \infty$ числитель и знаменатель стремятся к бесконечности. Следовательно, непосредственно применить свойство о пределе частного нельзя. Поэтому необходимо преобразовать общий член этой последовательности, разделив числитель и знаменатель на n^2 (на n в максимальной степени). Получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n + 1}{n^2 - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n^2})} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{2 + 0 + 0}{1 - 0} = 2. \quad \square \end{aligned}$$

Понятие функции. При изучении явлений природы, физических, экономических и др. процессов часто встречаются с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что значения одних величин полностью определяют значения других. Например, площадь круга S однозначно определяется значением его радиуса r с помощью формулы $S = \pi r^2$.

Пусть X и Y — два произвольных множества действительных чисел $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$. Если каждому элементу x из множества X по некоторому правилу f поставлен в соответствие определенный элемент y из множества Y , то говорят, что задана *функция* f . Для функции используется обозначение $y = f(x)$.

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом* функции, переменная y — *зависимой переменной* или значением функции. Множество X называют *областью определения* функции f . Множество всех значений $y = f(x)$ ($x \in X$) называется *множеством значений* функции. Например, функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ определена на отрезке $[-1; 1]$, т.е. областью определения является множество $X = [-1; 1]$. Множеством значений функции в данном случае является отрезок $Y = [0; 1]$.

Функция, все значения которой равны между собой, называется *постоянной*. Постоянную функцию часто обозначают буквой C .

Функция f , определенная на множестве X , называется *ограниченной*, если $\exists M > 0$ такое, что

$$\forall x \in X \quad |f(x)| \leq M.$$

Например, функция $y = \cos x$ является ограниченной на \mathbb{R} , так как

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\cos x| \leq 1,$$

а функция $y = \operatorname{tg} x$ не является ограниченной на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, так как не существует числа $M > 0$ такого, чтобы

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad |\operatorname{tg} x| \leq M.$$

Предел функции. Число b называется *пределом функции* f в точке $x = a$ (или при $x \rightarrow a$), если для любой последовательности $\{x_k\}$, сходящейся к a , соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_k)\}$ сходится к b . Для обозначения предела функции f в точке $x = a$ используется формула

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Приведем основные свойства пределов функций. Пусть функции f и g имеют в точке a пределы b и c :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c.$$

Тогда

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = bc,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \quad (\text{при условии } c \neq 0).$$

Пример 3. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x + 2}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 0 + 2 = 2 \neq 0,$$

то предел знаменателя не равен нулю, и, следовательно, применимо свойство 3). Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x + 2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + \lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 2} = \\ &= \frac{0 + 1}{0 + 2} = \frac{1}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 4. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2}$.

Решение. Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 1 + 1 - 2 = 0,$$

то свойство предела частного здесь применить нельзя. Однако заметим, что и

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 - \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1 - 1 = 0.$$

Говорят, что здесь имеем неопределённость вида $0/0$. Так как при рассмотрении предела функции в точке $x = 1$ ее аргумент принимает значения близкие к единице, но не равные ей, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x+2} = \frac{3}{3} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 5. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + x + 1}{x^2 + 9}$.

Решение. Числитель и знаменатель в отдельности при $x \rightarrow \infty$ неограниченно возрастают (неопределённость ∞/∞). Поэтому непосредственно перейти к частному пределу на основании свойств предела нельзя. Преобразуем функцию, стоящую под знаком предела. Разделим числитель и знаменатель на x в наибольшей степени, т.е. в данном случае, x^2 . Имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + x + 1}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{9}{x^2}} = \frac{9 + 0 + 0}{1 + 0} = 9. \quad \square$$

Пример 6. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x + 2}{11x^2 + 5x + 3}$.

Решение. Как и в предыдущем примере, разделим числитель и знаменатель на x в наибольшей степени. Получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x + 2}{11x^2 + 5x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{\frac{11}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3}}.$$

В этом выражении предел знаменателя равен нулю, в то время как предел числителя нулю не равен. В таких случаях считают, что предел всей дроби равен бесконечности. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x + 2}{11x^2 + 5x + 3} = \frac{2 + 0 + 0}{0 + 0 + 0} = \infty. \quad \square$$

Пример 7. Найти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{x^2 - 9}$.

Решение. Получим в числителе разность квадратов.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+13} - 4)(\sqrt{x+13} + 4)}{(x^2 - 9)(\sqrt{x+13} + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+13) - 16}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13} + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13} + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3)(\sqrt{x+13} + 4)} = \frac{1}{(3+3)(\sqrt{3+13} + 4)} = \\ &= \frac{1}{6 \cdot (4+4)} = \frac{1}{48}. \quad \square \end{aligned}$$

Замечательные пределы. Первым замечательным пределом называется следующее равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Приводимые ниже пределы являются его следствиями

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Пример 8. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 8x}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 8x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \frac{\sin 4x}{4x}}{8x \frac{\sin 8x}{8x}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{\sin 8x}{8x}} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{\sin 8x}{8x}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1} = \frac{1}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Второй замечательный предел задаётся равенством

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad e = 2,71828 \dots$$

Его следствия:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Пример 9. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x-1} \right)^{4x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида 1^∞ , так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{2x-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 4x = \infty.$$

Выделяя у дроби целую часть, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x-1} \right)^{4x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1-2}{2x-1} \right)^{4x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{2x-1} \right)^{4x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{2x-1} \right)^{\frac{2x-1}{-2} \frac{-2}{2x-1} 4x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-2}{2x-1} \right)^{\frac{2x-1}{-2}} \right)^{\frac{-2}{2x-1} 4x}. \end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{-0}{2-0} = 0,$$

то выражение в больших скобках стремится к числу e и

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x-1} \right)^{4x} &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{2x-1} 4x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8x}{2x-1}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8}{2 - 1/x}} = e^{\frac{-8}{2-0}} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}. \quad \square \end{aligned}$$

Число e имеет экономическую интерпретацию. При непрерывном начислении процентов зависимость суммы вклада в банке $S(t)$ от времени t имеет вид

$$S(t) = S_0 e^{pt},$$

где S_0 начальная величина вклада в момент $t = 0$, p параметр определяющий скорость роста вклада.

4 Теория дифференцирования

Понятие производной. Если мы хотим получить представление, как быстро изменяется значение функции при изменении независимого переменного в окрестности точки x , то должны сопоставить или сравнить каким-то образом приращение аргумента Δx и приращение функции Δy . С целью более глубокого изучения функции, исследования скорости изменения ее значений вводится понятие производной — одно из важнейших понятий математики.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю. Для обозначения производной используется символ $f'(x)$. Таким образом, по определению

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Операцию нахождения производной называют дифференцированием.

Пример 1. Найти производную функции $f(x) = x^2$.

Решение. Находим приращение функции.

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Находим предел (1).

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x + 0 = 2x.$$

То есть

$$(x^2)' = 2x. \quad \square$$

Если такую же операцию проделать со всеми основными элементарными функциями, то получится следующая таблица производных.

- | | |
|--|--|
| 1) $c' = 0,$ | 2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$ |
| 3) $(a^x)' = a^x \ln a,$ | 4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$ |
| 5) $(\sin x)' = \cos x,$ | 6) $(\cos x)' = -\sin x,$ |
| 7) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$ | 8) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$ |
| 9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ | 10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ |
| 11) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$ | 12) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$ |

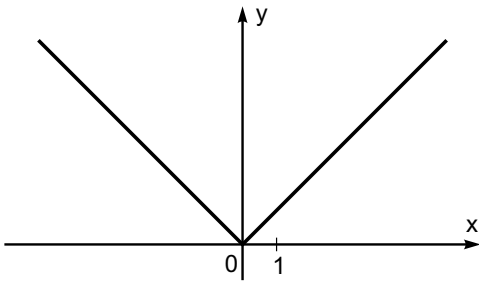
Из 2) в частности следует, что

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

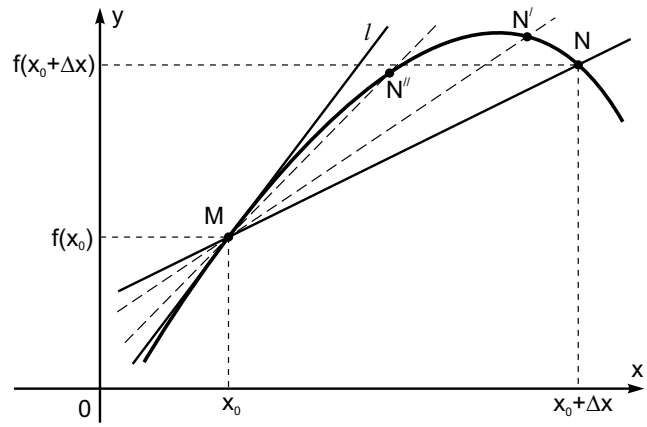
Так как $\ln e = 1$, то из 3) и 4) следует, что

$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$



Производная не всегда существует. Например, если $M(x_0, f(x_0))$ является угловой точкой графика функции $y = f(x)$, то у функции $f(x)$ нет производной в точке x_0 . Рассмотрим функцию $y = |x|$. Для неё начало координат является угловой точкой. Следовательно, у данной функции нет производной при $x = 0$. Строго говоря, производная не существует, если предел (1) не существует или равен бесконечности.

Задачи, приводящие к понятию производной. Начнём с геометрического смысла. Рассмотрим график некоторой функции $y = f(x)$ (см. рис.). Пусть $M(x_0, f(x_0))$ — какая-либо точка графика. Придадим аргументу приращение Δx . Соответствующую точку на графике обозначим через $N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Через точки M и N проведем прямую и назовем ее секущей. Если точку N устремить по графику к точке M , то положение секущей будет, вообще говоря, изменяться, и ее предельное положение называется *касательной* к кривой $y = f(x)$ в точке M .



Угловой коэффициент секущей MN равен

$$k_{MN} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если устремить приращение аргумента Δx к нулю, то угловой коэффициент секущей MN будет стремиться к угловому коэффициенту k касательной l , то есть

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{MN} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Таким образом искомая касательная проходит через точку $M(x_0, f(x_0))$, и её угловой коэффициент равен $f'(x_0)$. Поэтому её уравнение имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (2)$$

Перейдём к физическому смыслу производной. Пусть некоторая материальная точка M движется прямолинейно и задан закон её движения $s = s(t)$, то есть известно расстояние $s(t)$ от точки M до некоторой начальной точки отсчета в каждый момент времени t . В момент времени t_0 точка пройдет расстояние $s(t_0)$, а в момент времени $t_0 + \Delta t$ — расстояние $s(t_0 + \Delta t)$. За промежуток времени Δt точка M пройдет расстояние

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0).$$

Отношение $\Delta s / \Delta t$ можно рассматривать как среднюю скорость движения за время Δt . Чем меньше этот промежуток времени, тем точнее средняя скорость будет характеризовать движение точки в момент времени t_0 . Поэтому предел средней скорости движения при $\Delta t \rightarrow 0$ называют *скоростью движения* (или *мгновенной скоростью движения*) точки M в момент времени t_0 и обозначают $v(t_0)$, то есть

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0).$$

Таким образом, скорость движения есть производная от пройденного расстояния по времени.

Рассмотрим экономический смысл производной. Пусть $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции за время t на некотором предприятии. Необходимо найти производительность труда в момент времени t_0 . За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u(t_0)$ до значения $u(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ будет равна

$$z_{cp} = \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t}.$$

Производительность труда z в момент времени t_0 есть предельное значение средней производительности при $t \rightarrow t_0$,

$$z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z_{cp} = u'(t_0).$$

Правила дифференцирования. Следующие правила применяются для дифференцирования функций, не вошедших в таблицу производных.

- 1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,
- 2) $(cf(x))' = cf'(x)$,
- 3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- 4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,
- 5) $(f(u(x)))' = f'(u(x))u'(x)$.

Правило 5) позволяет находить производные сложных функций.

Пример 2. Найти производную функции $f(x) = x^2 \sin x$.

Решение. По правилу 3)

$$f'(x) = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x. \quad \square$$

Пример 3. Найти производную функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} e^{x^3 \cos 2x}.$$

Решение. Пользуемся правилом 5) для производной сложной функции.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + (e^{x^3 \cos 2x})^2} (e^{x^3 \cos 2x})' = \\ &= \frac{1}{1 + e^{2x^3 \cos 2x}} e^{x^3 \cos 2x} (x^3 \cos 2x)' = \\ &= \frac{e^{x^3 \cos 2x}}{1 + e^{2x^3 \cos 2x}} \left((x^3)' \cos 2x + x^3 (\cos 2x)' \right) = \\ &= \frac{e^{x^3 \cos 2x}}{1 + e^{2x^3 \cos 2x}} \left(3x^2 \cos 2x + x^3 (-\sin 2x)(2x)' \right) = \\ &= \frac{e^{x^3 \cos 2x}}{1 + e^{2x^3 \cos 2x}} \left(3x^2 \cos 2x - 2x^3 \sin 2x \right). \quad \square \end{aligned}$$

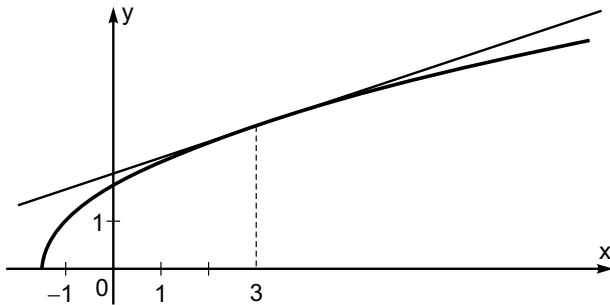
Пример 4. Составить уравнение касательной к кривой

$$y = \sqrt{2x+3}$$

в точке $x = 3$.

Решение. Находим производную данной функции.

$$f'(x) = y' = \frac{1}{2\sqrt{2x+3}} (2x+3)' = \frac{1}{2\sqrt{2x+3}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}.$$



Уравнение касательной составляем по формуле (2).

$$\begin{aligned} y - f(3) &= f'(3)(x - 3), \quad y - \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3 + 3}}(x - 3), \\ y - 3 &= \frac{1}{3}(x - 3), \quad y - 3 = \frac{x}{3} - 1, \quad y = \frac{x}{3} + 2. \quad \square \end{aligned}$$

Дифференциал функции. Как мы уже знаем, производная функции $y = f(x)$ определяется по формуле

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Поэтому при малых значениях Δx

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

Правую часть последнего выражения принято называть *дифференциалом* функции y в точке x :

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

При малых Δx дифференциал dy приближённо равен приращению функции Δy .

Рассмотрим функцию $y = x$. Для неё

$$dy = dx = x' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Таким образом, $dx = \Delta x$. Поэтому выражение дифференциала можно записать в виде

$$dy = f'(x) dx.$$

Пример 5. Найти дифференциал функции $y = \sin^5 3x$.

Решение. Находим производную.

$$y' = 5 \sin^4 3x (\sin 3x)' = 5 \sin^4 3x \cos 3x (3x)' = 15 \sin^4 3x \cos 3x.$$

Тогда

$$dy = y' dx = 15 \sin^4 3x \cos 3x dx. \quad \square$$

Производные высших порядков. Пусть функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке $x \in (a, b)$. Тогда на промежутке (a, b) будет определена функция $f'(x)$, и тоже можно говорить о её производной. Назовем $f'(x)$ производной первого порядка функции $f(x)$. Производной второго порядка функции $f(x)$ называется производная от функции $f'(x)$, если она существует. Обозначается вторая производная символами y'' или $f''(x)$.

Производную от второй производной называют производной третьего порядка функции $f(x)$ и обозначают y''' или $f'''(x)$. Производная n -го порядка является производной от производной $(n-1)$ -го порядка. Производная n -го порядка обозначается $y^{(n)}$ либо $f^{(n)}(x)$.

Рассмотрим физический смысл второй производной. Как мы уже знаем, первая производная пути по времени есть скорость. Тогда вторая производная — это скорость изменения скорости, то есть ускорение.

Пример 6. Вычислить третью производную функции

$$f(x) = x^3 e^{2x}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' e^{2x} + x^3 (e^{2x})' = 3x^2 e^{2x} + 2x^3 e^{2x} = \\ &= (3x^2 + 2x^3) e^{2x}, \\ f''(x) &= (6x + 6x^2) e^{2x} + (3x^2 + 2x^3) 2e^{2x} = \\ &= 2(2x^3 + 6x^2 + 3x) e^{2x}, \\ f'''(x) &= 2(6x^2 + 12x + 3) e^{2x} + 2(2x^3 + 6x^2 + 3x) 2e^{2x} = \\ &= 2(2x^3 + 12x^2 + 15x + 3) e^{2x}. \quad \square \end{aligned}$$

Правило Лопиталья. Правило Лопиталья даёт простой и эффективный способ раскрытия неопределённостей вида $0/0$ или ∞/∞ при вычислении пределов.

ТЕОРЕМА 1 (ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ). Пусть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

либо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если последний предел существует.

Пример 7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$.

Решение. Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = \infty,$$

то имеем неопределённость вида $0 \cdot \infty$. Чтобы применить правило Лопиталья, преобразуем её к виду ∞/∞ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0. \quad \square$$

Пример 8. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^3}$.

Решение. Имеем неопределённость вида ∞/∞ . Применим правило Лопиталья.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{3x^2}.$$

Мы снова получили неопределённость вида ∞/∞ . Применим правило Лопиталья ещё раз. И будем делать это до тех пор, пока не исчезнет неопределённость.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln^2 2}{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln^3 2}{6} = \frac{\infty}{6} = \infty. \quad \square$$

Монотонность и экстремум функции. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке (a, b) , если для всяких x_1, x_2 из (a, b) таких, что $x_1 < x_2$, верно неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Функция $f(x)$ называется *убывающей* на промежутке (a, b) , если для всяких x_1, x_2 из (a, b) таких, что $x_1 < x_2$, верно неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Если функция возрастает или убывает на промежутке (a, b) , то говорят, что она *монотонна* на этом промежутке.

ТЕОРЕМА 2 (УСЛОВИЕ ВОЗРАСТАНИЯ ФУНКЦИИ). Если $f'(x) \geq 0$ на промежутке (a, b) , то функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке.

ТЕОРЕМА 3 (УСЛОВИЕ УБЫВАНИЯ ФУНКЦИИ). Если $f'(x) \leq 0$ на промежутке (a, b) , то функция $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Значения функции в точках максимума и минимума называются соответственно *максимумом* и *минимумом* функции. Максимум и минимум функции объединяются общим названием *экстремума* функции. Понятие экстремума имеет огромное значение для прикладных дисциплин, таких как физика или экономика.

Экстремум функции часто называют *локальным экстремумом*, подчёркивая тот факт, что понятие экстремума связано лишь с достаточно малой окрестностью точки x_0 . Так что на одном промежутке функция может иметь несколько экстремумов, причём может случиться что минимум в одной точке больше максимума в другой.

Назовём *стационарными* точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю или не существует.

ТЕОРЕМА 4 (НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА). Если функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 , то эта точка стационарная для функции $f(x)$.

Однако заметим, что не всякая стационарная точка является точкой экстремума. Таким образом, для нахождения экстремумов требуется дополнительное исследование стационарных точек.

ТЕОРЕМА 5 (ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА). Если при переходе через точку x_0 производная функции $f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума функции $f(x)$, а если с минуса на плюс, — то точка минимума.

Для решения прикладных задач важно уметь находить наибольшее и наименьшее значения (глобальный максимум и минимум) функции на отрезке $[a, b]$.

Глобальный максимум или минимум могут достигаться либо на концах отрезка $[a, b]$ либо в точках экстремума. А каждая точка экстремума, как мы уже знаем, является стационарной. Поэтому для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удобно пользоваться следующей схемой:

- 1) найти $f'(x)$;
- 2) найти стационарные точки функции $f(x)$ на интервале (a, b) ;
- 3) найти значения функции в стационарных точках и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее f_{\max} и наименьшее f_{\min} .

Пример 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 5(x-1)^2 e^{-x}$ на отрезке $[0, 5]$.

Решение. 1) Находим производную

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10(x-1)e^{-x} + 5(x-1)^2 e^{-x}(-1) = \\ &= 5e^{-x}(2(x-1) - (x-1)^2) = \\ &= 5e^{-x}(x-1)(2 - (x-1)) = -5e^{-x}(x-1)(x-3). \end{aligned}$$

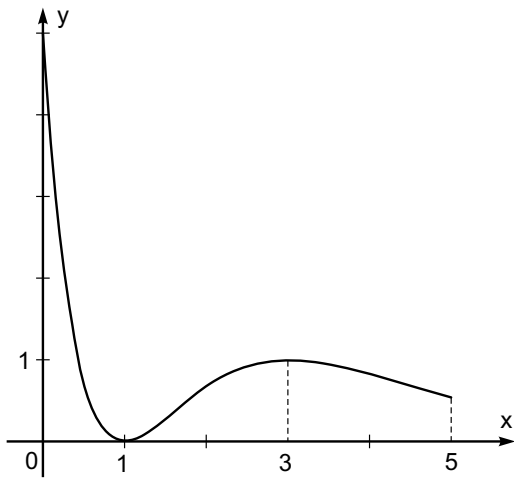
- 2) $f'(x)$ обращается в нуль в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Это и есть стационарные точки.
- 3) Находим значения функции в стационарных точках и на концах отрезка $[0, 5]$.

$$f(1) = 0, \quad f(3) = \frac{20}{e^3}, \quad f(0) = 5, \quad f(5) = \frac{80}{e^5}.$$

Итак, $f_{\min} = f(1) = 0$ и $f_{\max} = f(0) = 5$. \square

Исследование функций и построение их графиков. При исследовании функций и построении их графиков полезно придерживаться следующей схемы:

- 1) найти область определения функции;
- 2) исследовать функцию на чётность—нечётность;
- 3) найти пределы функции в граничных точках области определения;
- 4) в случае бесконечной области определения найти предел функции в бесконечности;



- 5) найти экстремумы и интервалы монотонности функции;
 6) найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Пример 10. Исследовать функцию $f(x) = \frac{4e^{-x^2-2x}}{4x-5}$ и построить её график.

Решение. 1) Знаменатель обращается в нуль при $x = 5/4$. Поэтому область определения функции $f(x)$

$$\left(-\infty, \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}, +\infty\right).$$

- 2) Функция $f(x)$ не является ни чётной, ни нечётной.
 3) Найдём пределы функции $f(x)$ при x стремящемся к $5/4$ слева (коротко обозначается $x \rightarrow 5/4 - 0$) и справа (обозначается $x \rightarrow 5/4 + 0$).

$$\lim_{x \rightarrow 5/4 - 0} f(x) = \frac{4e^{-25/16-5/2}}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 5/4 + 0} f(x) = \frac{4e^{-25/16-5/2}}{+0} = +\infty.$$

- 4) Найдём пределы при x стремящемся к $-\infty$ и $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{4e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{4 \cdot 0}{-\infty} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{4e^{-\infty}}{+\infty} = \frac{4 \cdot 0}{+\infty} = 0,$$

- 5) Вычислим производную.

$$f'(x) = 4 \frac{e^{-x^2-2x}(-2x-2)(4x-5) - e^{-x^2-2x} \cdot 4}{(4x-5)^2} =$$

$$= 4 \frac{e^{-x^2-2x}(-8x^2+2x+6)}{(4x-5)^2}.$$

Находим нули производной.

$$-8x^2 + 2x + 6 = 0, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{-8} = \frac{-1 \pm 7}{-8}.$$

То есть $x_1 = -3/4$, $x_2 = 1$.

Интервалы монотонности функции совпадают с промежутками знакопостоянства производной, которые, в свою очередь, лежат между стационарными точками и точками, где функция не существует. Для изучения поведения функции и её производной в таких точках и интервалах построим следующую таблицу.

x	$(-\infty, -\frac{3}{4})$	$-\frac{3}{4}$	$(-\frac{3}{4}, 1)$	1	$(1, \frac{5}{4})$	$\frac{5}{4}$	$(\frac{5}{4}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	\neq	-
$f(x)$	\searrow	$\approx -1,3$	\nearrow	$\approx -0,2$	\searrow	\neq	\searrow

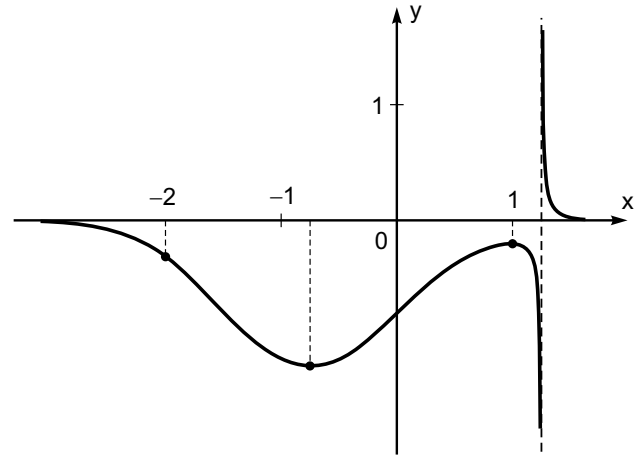
Здесь стрелка \nearrow обозначает возрастание, а \searrow — убывание функции.

- 6) Находим точки пересечения с осями координат. Уравнение $f(x) = 0$ не имеет решений.

$$f(0) = \frac{4e^0}{-5} = -\frac{4}{5} = -0,8.$$

Находим дополнительные точки.

$$f(-3) \approx -0,01, \quad f(-2) \approx -0,3, \quad f(1,5) \approx 0,02.$$



По результатам исследования строим график. \square

Понятие эластичности функции. Большое значение в экономике имеет понятие эластичности функции. Эластичностью функции $y = f(x)$ относительно переменной x называется величина

$$E_x(y) = \frac{x}{f(x)} f'(x). \quad (3)$$

Эластичность функции характеризует процент прироста зависимой переменной, соответствующий приращению независимой переменной на 1%.

Пример 11. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и выпуском продукции x (млн. руб.) выражается функцией $y = -0,5x + 80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн. руб.

Решение. По определению (3)

$$E_x(y) = \frac{x}{-0,5x + 80} (-0,5) = \frac{x}{x - 160}.$$

Тогда

$$E_{x=60}(y) = \frac{60}{60 - 160} = -0,6,$$

то есть при выпуске продукции, равном 60 млн. руб., увеличение его на 1% приведёт к снижению себестоимости на 0,6%. \square

5 Неопределённый интеграл

Первообразная и неопределённый интеграл. Основной операцией дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Однако, естественно, возникает вопрос о существовании операции, обратной дифференцированию. Восстановление функции по известной производной этой функции есть основная задача интегрального исчисления.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ если

$$F'(x) = f(x).$$

Например, функция $F(x) = x^5/5$ является первообразной для функции $f(x) = x^4$, так как

$$F'(x) = \frac{1}{5}(x^5)' = x^4 = f(x).$$

Функция $F(x) = -\cos x$ является первообразной для функции $f(x) = \sin x$, так как

$$F'(x) = -(\cos x)' = \sin x = f(x).$$

Задача об отыскании первообразной по данной функции $f(x)$ решается неоднозначно. Если, например, $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то функция $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной для функции $f(x)$. Действительно,

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Более того, можно доказать, что множество функций вида $F(x) + C$ описывает все первообразные для данной функции $f(x)$. Таким образом, если известна хотя бы одна первообразная для данной функции $f(x)$, то известно и всё множество первообразных для этой функции.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределённым интегралом* функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x) dx.$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x) dx$ — *подынтегральным выражением*, переменная x — *переменной интегрирования*.

Итак, если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная. Отыскание неопределённого интеграла по подынтегральной функции называется интегрированием этой функции.

Например,

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

Свойства неопределённого интеграла. Приведем таблицу основных интегралов. Формулы этой таблицы можно проверить дифференцированием их правой части.

- 1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$),
- 2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,
- 3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($0 < a \neq 1$),
- 3') $\int e^x dx = e^x + C$,
- 4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$,
- 5) $\int \cos x dx = \sin x + C$,
- 6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$,
- 7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,
- 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ($-a < x < a$, $a > 0$),
- 9) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ ($a \neq 0$),
- 10) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$ ($a \neq 0$),
- 11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$ ($a \neq 0$).

Рассмотрим теперь основные свойства неопределённого интеграла.

- 1) Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

- 2) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$$

- 3) Интеграл от суммы равен сумме интегралов.

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Пример 1. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

Решение. Воспользуемся формулой 1) из таблицы основных интегралов.

$$I = \int x^{-1/3} dx = \frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} + C = \frac{x^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C. \quad \square$$

Пример 2. Найти интеграл

$$I = \int 2^{3x-1} dx.$$

Решение. Воспользуемся формулой 3).

$$I = \int 2^{3x} \cdot 2^{-1} dx = \frac{1}{2} \int 8^x dx = \frac{1}{2} \frac{8^x}{\ln 8} + C. \quad \square$$

Пример 3. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{4x^2 + 25}.$$

Решение. Воспользуемся формулой 9).

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{4} \frac{dx}{x^2 + 25/4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + (5/2)^2} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{5/2} \operatorname{arctg} \frac{x}{5/2} + C = \frac{1}{10} \operatorname{arctg} \frac{2x}{5} + C. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 4. Найти интеграл

$$I = \int \frac{(2\sqrt{x} + 1)^3}{x\sqrt{x}} dx.$$

Решение. Разложим числитель по формуле куба суммы.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{8x^{3/2} + 12x + 6x^{1/2} + 1}{x^{3/2}} dx = \\ &= \int (8 + 12x^{-1/2} + 6x^{-1} + x^{-3/2}) dx = \\ &= 8 \int dx + 12 \int x^{-1/2} dx + 6 \int \frac{dx}{x} + \int x^{-3/2} dx = \\ &= 8x + 12 \frac{x^{1/2}}{1/2} + 6 \ln|x| + \frac{x^{-1/2}}{-1/2} + C = \\ &= 8x + 24\sqrt{x} + 6 \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C. \quad \square \end{aligned}$$

Метод замены переменной. Метод замены переменной часто позволяет свести неизвестный интеграл к табличному.

Пример 5. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{1-2x}.$$

Решение. Положим $t = 1 - 2x$. Тогда

$$x = \frac{1-t}{2}, \quad dx = \left(\frac{1-t}{2} \right)' dt = -\frac{dt}{2},$$

и

$$I = \int \frac{-dt/2}{t} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \ln|t| + C.$$

Теперь нужно вернуться к исходной переменной. Тогда

$$I = -\frac{1}{2} \ln|1-2x| + C. \quad \square$$

Пример 6. Найти интеграл

$$I = \int x e^{-x^2} dx.$$

Решение. Положим $t = -x^2$. Тогда

$$dt = (-x^2)' dx = -2x dx, \quad x dx = -\frac{1}{2} dt.$$

В данном случае нет необходимости выражать переменную x через t , поскольку при замене $-x^2$ на t и $x dx$ на $-1/2 dt$ переменная x больше не будет входить в подинтегральное выражение. В самом деле

$$\begin{aligned} I &= \int e^t \left(-\frac{1}{2} dt\right) = -\frac{1}{2} \int e^t dt = \\ &= -\frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 7. Найти интеграл

$$I = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. Положим $t = 1 - x^2$. Тогда

$$dt = (1 - x^2)' dx = -2x dx, \quad x dx = -\frac{dt}{2},$$

и

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int t^{-1/2} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 8. Найти интеграл

$$I = \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx.$$

Решение. Положим $t = \ln x$. Тогда

$$dt = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x},$$

и

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \\ &= \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3} \sqrt{t^3} + C = \frac{2}{3} \sqrt{\ln^3 x} + C. \quad \square \end{aligned}$$

Метод интегрирования по частям. Формула

$$\int u dv = uv - \int v du$$

называется *формулой интегрирования по частям*. Эта формула оказывается полезной при вычислении интегралов следующих двух видов:

$$\begin{aligned} \text{I.} & \int x^n e^{ax} dx, \quad \int x^n \sin mx dx, \quad \int x^n \cos mx dx; \\ \text{II.} & \int x^k \ln^n x dx, \quad \int x^k \arcsin x dx, \quad \int x^k \arccos x dx, \\ & \int x^k \arctg x dx, \quad \int x^k \operatorname{arccctg} x dx. \end{aligned}$$

Рассмотрим примеры интегралов из I группы.

Пример 9. Найти интеграл

$$I = \int x e^{-2x} dx.$$

Решение. Применим к этому интегралу формулу интегрирования по частям. Для этого положим

$$u = x, \quad dv = e^{-2x} dx.$$

Тогда

$$v = \int dv = \int e^{-2x} dx = \frac{e^{-2x}}{-2} = -\frac{1}{2} e^{-2x}, \quad du = dx.$$

Вычисляя интеграл в последней формуле мы не выписывали произвольную постоянную C , поскольку здесь нам было нужно не всё множество первообразных, а какая-нибудь одна из них.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} I &= \int u dv = uv - \int v du = \\ &= x \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right) - \int \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right) dx = \\ &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \frac{e^{-2x}}{-2} dx + C = \\ &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} dx + C. \quad \square \end{aligned}$$

Пример 10. Найти интеграл

$$I = \int x^2 \sin x dx.$$

Решение. Положим

$$u = x^2, \quad dv = \sin x dx.$$

Тогда

$$v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x, \quad du = (x^2)' dx = 2x dx,$$

и

$$I = x^2(-\cos x) - \int (-\cos x) 2x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx.$$

Чтобы вычислить

$$\int x \cos x dx$$

снова применим формулу интегрирования по частям. Положим

$$u = x, \quad dv = \cos x dx.$$

Тогда

$$v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x, \quad du = dx,$$

и

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

В результате

$$I = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + 2C. \quad \square$$

Рассмотрим теперь интеграл из II группы.

Пример 11. Найти интеграл

$$I = \int x \ln x dx.$$

Решение. Положим

$$u = \ln x, \quad dv = x dx.$$

Тогда

$$v = \int dv = \int x dx = \frac{x^2}{2}, \quad du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx,$$

и

$$\begin{aligned} I &= \ln x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \quad \square \end{aligned}$$

Интегрирование тригонометрических функций.

Пример 12. Найти интеграл

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$$

Решение. Положим $t = \cos x$. Тогда

$$\begin{aligned} dt &= (\cos x)' dx = -\sin x dx, \\ \sin^3 x dx &= \sin^2 x (\sin x dx) = (1 - \cos^2 x)(-dt) = \\ &= (1 - t^2)(-dt) = (t^2 - 1) dt, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t^2 - 1}{t^4} dt = \int t^{-2} dt - \int t^{-4} dt = \frac{t^{-1}}{-1} - \frac{t^{-3}}{-3} + C = \\ &= \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C. \quad \square \end{aligned}$$

Для нахождения многих интегралов оказываются полезными формулы, преобразующие произведение тригонометрических функций в сумму:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)), \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)), \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)), \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Пример 13. Найти интеграл

$$I = \int \sin 3x \cos 5x dx.$$

Решение. По рассмотренным выше формулам

$$\sin 3x \cos 5x = \frac{1}{2} (\sin 8x + \sin(-2x)) = \frac{1}{2} \sin 8x - \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \sin 8x dx - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{-\cos 8x}{8} - \frac{1}{2} \frac{-\cos 2x}{2} + C = \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 8x}{16} + C. \quad \square \end{aligned}$$

6 Определённый интеграл

Понятие определённого интеграла. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$. Рассмотрим фигуру (см. рис.), ограниченную графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox . Её называют *криволинейной трапецией*. Поставим задачу об определении и вычислении площади этой криволинейной трапеции.

Отрезок $[a, b]$ разобьём на n произвольных частей точками:

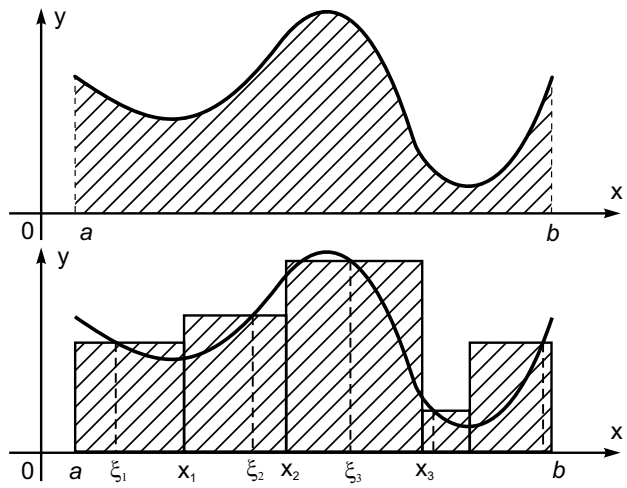
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b.$$

Через точки x_k проведём прямые, параллельные оси Oy . Криволинейная трапеция разобьётся на n частичных криволинейных трапеций. Теперь на каждом из отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, \dots , $[x_{n-1}, x_n]$ произвольно выберем по точке ξ_k ,

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Вычислим значение $f(\xi_k)$. И каждую частичную криволинейную трапецию заменим прямоугольниками с высотами $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, \dots , $f(\xi_n)$. Тогда можно полагать, что для площади S криволинейной трапеции справедливо соотношение

$$S \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$



Естественно предположить, что это равенство будет тем точнее, чем меньше максимум длин отрезков разбиения

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}).$$

Поэтому площадь криволинейной трапеции S равна

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (1)$$

Число S , равное пределу (1), называют *определённым интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Таким образом, задача о вычислении площади криволинейной трапеции приводит к введению понятия определённого интеграла.

Основные свойства определённого интеграла.

- 1) При перемене местами пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

- 2) Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всём отрезке равен сумме интегралов по каждой из частей.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

- 3) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

- 4) Интеграл от суммы равен сумме интегралов.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

Формула Ньютона—Лейбница. Если $F(x)$ — произвольная первообразная функции $f(x)$, то справедлива формула Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Таким образом, формула Ньютона—Лейбница сводит вычисление определённого интеграла к вычислению разности значений любой её первообразной на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Эта формула считается основной формулой интегрального исчисления.

Разность $F(b) - F(a)$ для удобства обозначают $F(x)|_a^b$. Поэтому формулу Ньютона—Лейбница можно записать в виде:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b.$$

Пример 1. Вычислить

$$I = \int_0^1 x^2 dx.$$

Решение. По формуле Ньютона—Лейбница

$$I = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}. \quad \square$$

Замена переменной в определённом интеграле. Замена переменной осуществляется точно так же, как и в неопределённом интеграле с двумя различиями:

- 1) при замене следует пересчитывать пределы интегрирования;
- 2) не нужно возвращаться к старой переменной.

Пример 2. Вычислить

$$I = \int_0^1 x(2 - x^2)^5 dx.$$

Решение. Положим $t = 2 - x^2$. Тогда

$$dt = (2 - x^2)' dx = -2x dx, \quad x dx = -\frac{1}{2} dt, \\ x = 0 \Rightarrow t = 2 - 0^2 = 2, \quad x = 1 \Rightarrow t = 2 - 1^2 = 1.$$

Поэтому

$$I = \int_2^1 t^5 \left(-\frac{1}{2} dt\right) = -\frac{1}{2} \int_2^1 t^5 dt = \frac{1}{2} \int_1^2 t^5 dt = \frac{1}{2} \frac{t^6}{6} \Big|_1^2 = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{2^6}{6} - \frac{1^6}{6}\right) = \frac{1}{12}(2^6 - 1) = \frac{63}{12} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}. \quad \square$$

Формула интегрирования по частям. Формула интегрирования по частям для определённого интеграла принимает вид:

$$\int_a^b u dv = (uv)|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 3. Вычислить

$$I = \int_1^2 \ln x dx.$$

Решение. Положим

$$u = \ln x, \quad dv = dx.$$

Тогда

$$v = \int dv = \int dx = x, \quad du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx.$$

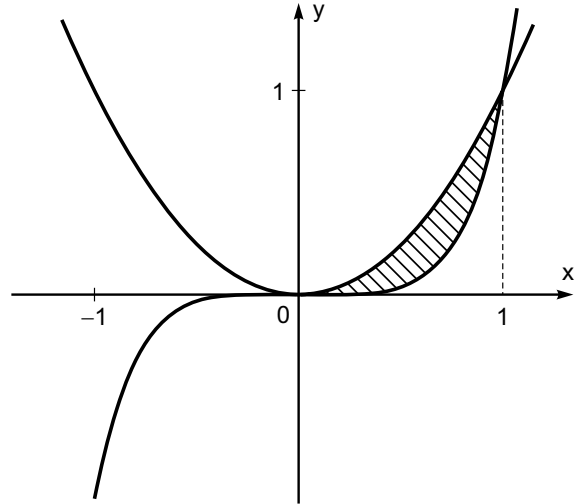
Поэтому

$$I = (x \ln x)|_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - 1 \ln 1 - \int_1^2 dx = \\ = 2 \ln 2 - x|_1^2 = \ln 2^2 - (2 - 1) = \ln 4 - 1. \quad \square$$

Вычисление площадей плоских фигур. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ такие, что $f_1(x) \leq f_2(x)$. Тогда площадь S фигуры, заключённой между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, на отрезке $[a, b]$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = x^5$.



Решение. Находим точки пересечения данных кривых.

$$x^2 = x^5, \quad x^2 - x^5 = 0, \quad x^2(1 - x^3) = 0,$$

Отсюда

$$x_1 = 0, \quad 1 - x_2^3 = 0, \quad x_2^3 = 1, \quad x_2 = \sqrt[3]{1} = 1.$$

На отрезке $[0, 1]$ $x^5 \leq x^2$. Поэтому

$$S = \int_0^1 (x^2 - x^5) dx = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^5 dx = \\ = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{x^6}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}. \quad \square$$