АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 1. Написать разложение вектора x по векторам p, q, r.

Дано: $\mathrm{x} = \{-13, 2, 18\}, \mathrm{p} = \{1, 1, 4\}, \mathrm{q} = \{-3, 0, 2\}, \mathrm{r}\{1, 2, -1\}$.

Решение.

$$x = \alpha p + \beta q + \gamma r.$$

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta + \gamma = -13, \\ \alpha + 2\gamma = 2, \\ 4\alpha + 2\beta - \gamma = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\beta - \gamma = -15, \\ \alpha = 2 - 2\gamma, \\ 2\beta - 9\gamma = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2, \\ \beta = 5, \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Задача 2. Коллинеарны ли векторы c_1 и c_2, построенные по векторам a и b ?

Дано: $a = \{-1,2,-1\}, b\{2,-7,1\}, c_1 = 6a - 2b, c_2 = b - 3a.$

Решение.

$$c_1 = 6a - 2b = \{6\cdot(-1) - 2\cdot 2; 6\cdot 2 - 2\cdot(-7); 1 - 6\cdot(-1) - 2\cdot 1\} = \{-10, 26, -8\}.$$

$$c_2 = b - 3a = \{2 - 3\cdot(-1); -7 - 3\cdot 2; 1 - 3\cdot(-1)\} = \{5, -13, 4\}.$$

$\dfrac{-10}{-5} = \dfrac{26}{-13} = \dfrac{-8}{4} \Rightarrow$ векторы c_1 и c_2 коллинеарны.

Задача 3. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Дано $\mathrm{A}(1, -2, 3), \mathrm{B}(3, 4, -6), \mathrm{C}(1, 1, -1)$.

Решение.

$$\overline{AB} = \{4, 2, -3\}, \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}.$$

$$\overline{AC} = \{2, -1, 2\}, \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (2)^2} = 3.$$

$$\cos(\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = \frac{4\cdot 2 - 2\cdot 1 - 3\cdot 2}{3\cdot\sqrt{29}} = 0.$$

$$(\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}.$$

Задача 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b.

Дано: $\mathrm{a} = 6\mathrm{p} - \mathrm{q}, \mathrm{b} = 5\mathrm{q} + \mathrm{p}.$

Решение.

$$|p| = \frac{1}{2}, |q| = 4, (p \wedge q) = \frac{5\pi}{6}.$$

$$S = |(6p - q)\times(5q + p)| == |6p\times 5q + 6p\times p - 5q\times q - q\times p| = |6p\times 5q + p\times q| =$$

$$= 31|p|\cdot|q|\cdot\sin(p \wedge q) = 31\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sin\frac{5\pi}{6} = 31\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 31.$$

Задача 5. Компланарны ли векторы a, b и c. Дано: $a = \{7,3,4\}, b = \{-1,2,-1\}, c = \{4,2,4\}.$

Решение.

$(a,b,c) = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -56 - 12 - 8 + 32 + 14 + 12 = -18 \neq 0 \Rightarrow$ векторы a, b и c не компланарны.

Задача 6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Дано: $A_1(0,-1,-1),\ \mathrm{A}_2(-2,3,5), \mathrm{A}_3(1,-5,-9), \mathrm{A}_4(-1,-6,3).$

Решение.

$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} = \{-2,4,6\}, \overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3} = \{1,-4,-8\}, \overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4} = \{-1,-5,4\}.$

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right| = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & -4 & -8 \\ -1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot|32-30+32-24+80-16| = \frac{74}{6}.$$

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{3}S_{A_1A_2A_3}\cdot h \Rightarrow h = \frac{3V}{S}.$$

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & -4 & -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-8i-10j+4k| = \frac{1}{2}\sqrt{64+100+16} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{180} = \sqrt{45}.$$

$$h = \frac{3\cdot 74}{6\cdot\sqrt{45}} = \frac{37}{\sqrt{45}}.$$

Задача 7. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3.

Дано: $M_1(2,3,1),\ \mathrm{M}_2(4,1,-2), \mathrm{M}_3(6,3,7), \mathrm{M}_0(-5,-4,8).$

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-12(\mathrm{x}-2)-24(\mathrm{y}-3)+8(\mathrm{z}-1) = 0, -12\mathrm{x}-24\mathrm{y}+8\mathrm{z}+88 = 0,$$

$$\mathrm{d} = \frac{|\mathrm{Ax}_0+\mathrm{By}_0+\mathrm{Cz}_0+\mathrm{D}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}},$$

$$d = \frac{|-12\cdot(-5)-24\cdot(-4)+8\cdot 8+88|}{\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}} = \frac{308}{\sqrt{784}} = \frac{308}{28} = 11.$$

Задача 8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$.

Дано: $\mathrm{A}(0,-2,8), \mathrm{B}(4,3,2), \mathrm{C}(1,4,3).$

Решение.

$\overline{BC} = \{-3,1,1\}.$

Т.к. вектор $\overline{BC} \perp$ искомой плоскости, то его можно взять в качестве вектора нормали, следовательно

$$-3(x-0)+(y+2)+(z-8) = 0,$$
$$-3x+y+z-6-0.$$

Задача 9. Найти угол между плоскостями. Дано: $6x+2y-4z+17=0, 9x+3y-6z-4=0.$

Решение.

$$\overline{n_1}=\{6,2,-4\}, \overline{n_2}=\{9,3,-6\}.$$
$$\cos\varphi=\frac{6\cdot 9+2\cdot 3+(-4)\cdot(-6)}{\sqrt{6^2+2^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{9^2+3^2+(-6)^2}}=\frac{84}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{126}}=\frac{84}{\sqrt{7056}}=\frac{84}{84}=1,$$
$$\varphi=\operatorname{arr}\cos 1=0.$$

Задача 10. Найти координаты точки A, равноудаленной от точек B и C.

Дано: $A(x,0,0), B(1,2,3), C(2,6,10).$

Решение.

$$AB=\sqrt{(1-x)^2+2^2+3^2}=\sqrt{x^2-2x+14},$$
$$AC=\sqrt{(2-x)^2+6^2+10^2}=\sqrt{x^2-4x+140}.$$

$AB=AC$ по условию$\Rightarrow$

$$\sqrt{x^2-2x+14}=\sqrt{x^2-4x+140},$$
$$x^2-2x+14=x^2-4x+140,$$
$$2x=-126,$$
$$x=-63$$

Отсюда, $A(-63,0,0).$

Задача 11. Написать канонические уравнения прямой.

Дано: $x-3y+2z+2=0, x+3y+z+14=0.$

Решение.

$$\overline{S}=\overline{n_1}\times\overline{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-9i+j+6k.$$
$$\overline{S}=\{-9,1,6\}.$$

Найдем координаты одной из точек, через которые проходит прямая (x_0, y_0, z_0).

Зададим координате z значение $z=0$.

$$\begin{cases} x-3y+2=0, \\ x+3y+14=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x-3y+2=0, \\ 6y=-12 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=-8, \\ y=-2 \end{cases}$$

Итак, получается точка с координатами $(-8,-2,0).$

Уравнение прямой

$$\frac{x+8}{-9}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{6}.$$

Задача 12. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

Дана прямая $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}$ и плоскость: $x+2y-z-2=0$

Решение.

$$\begin{cases} x=-t-2, \\ y=t+1, \\ z=2t-3. \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости

$$(-t-2)+2(t+1)-(2t-3)-2=0,$$
$$-t-2+2t+2-2t+3-2=0,$$
$$-t+1=0,$$
$$t=1.$$

Таким образом, координаты искомой точки $(-3,2,-1)$.

Задача 13. Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой.

Дано: $M(3,3,3)$, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1{,}5}{0}=\frac{z-3}{1}$.

Решение.

$$-1(x-3)+0(y-3)+1(z-3)=0,$$
$$-x+z=0.$$

Найдем точку пересечения прямой и плоскости.

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1{,}5}{0}=\frac{z-3}{1} \Rightarrow \begin{cases} x=-t+1, \\ y=1{,}5, \\ z=t+3. \end{cases}$$

$$-(-t+1)+(t+3)=0,$$
$$2t+2=0,$$
$$t=-1.$$

$M_0(2;1{,}5;2)$ - координаты точки пересечения.

Отсюда,

$$x_{M_0}=\frac{x_M+x_{M'}}{2} \Rightarrow x_{M'}=2x_{M_0}-x_M=2\cdot 2-3=1,$$

$$y_{M_0}=\frac{y_M+y_{M'}}{2} \Rightarrow y_{M'}=2y_{M_0}-y_M=2\cdot 1{,}5-3=0,$$

$$z_{M_0}=\frac{z_M+z_{M'}}{2} \Rightarrow z_{M'}=2z_{M_0}-z_M=2\cdot 2-3=1.$$

Следовательно, $M'(1,0,1)$ - искомая точка.