

Задача 1. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 - (6+n)^2}{(6+n)^2 - (1-n)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(36 - 12n + n^2) - (36 + 12n + n^2)}{(36 + 12n + n^2) - (1 - 2n + n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-24n}{14n + 35} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-24}{14 + 35/n} = -\frac{24}{14} = -\frac{12}{7}. \end{aligned}$$

Задача 2. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 1} + 7n^3}{\sqrt[4]{n^{12} + n + 1} - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n^7} - \frac{1}{n^9}} + 7}{\sqrt[4]{1 + \frac{1}{n^{11}} + \frac{1}{n^{12}} - \frac{1}{n^2}}} = 7.$$

Задача 3. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1})}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2 + 1 - n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + 1/n^2} + \sqrt{1 - 1/n^2}} = 1. \end{aligned}$$

Задача 4. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)! - (2n+2)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (2n+2)}{(2n+2)(2n+3) - (2n+2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{4n^2 + 8n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2/n + 3/n^2}{4 + 8/n + 4/n^2} = 0. \end{aligned}$$

Задача 5. Вычислить пределы числовых последовательностей.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1} \right)^{\frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2}{2n+1} \cdot (n+1)} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{2n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+2/n}{2+1/n}} = e. \end{aligned}$$

Задача 6. Вычислить пределы функций.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-1)^2(x+3)^2}{x(x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-1)^2(x+3)}{x(x+1)} = 0.$$

Задача 7. Вычислить пределы функций.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt[4]{x} - 2)(\sqrt[4]{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt[4]{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt[4]{x} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt[4]{x} + 2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Задача 8. Вычислить пределы функций.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{\sqrt{8x+4} - 2} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{\sqrt{2x+1} - 1} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-3}{1-3x}}{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sqrt{2x+1}}{1-3x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Задача 9. Вычислить пределы функций.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \frac{x-1=y}{y \rightarrow 0} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y+1)^2 - 1}{\ln(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 + 2y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} (y+2) = 2.$$

Задача 10. Вычислить пределы функций.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{tgx - tg2}{\sin \ln(x-1)} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \frac{2-x=y}{y \rightarrow 0} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{tg(2-y) - tg2}{\sin \ln(1-y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{tg(2-y) - tg2}{\ln(1-y)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-1/\cos^2(2-y)}{-1/(1-y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-y}{\cos^2(2-y)} = \frac{1}{\cos^2 2} = 1 + tg^2 2. \end{aligned}$$

Задача 11. Вычислить пределы функций.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{3x} - 3^{2x}}{tgx + x^3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(7^{3x} - 1) - (3^{2x} - 1)}{x + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \ln 7 - 2x \ln 3}{x^2 + 1} = 0.$$

Задача 12. Вычислить пределы функций.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{\pi \cos \pi x} = \frac{-2}{\pi \cos \pi} = \frac{-2}{-\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Задача 13. Вычислить пределы функций.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} &= 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2})^{\frac{1}{x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2}}{x}} = \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}. \end{aligned}$$

Задача 14. Вычислить пределы функций.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{3x} \right)^{x^2} = \left(\frac{2}{3} \right)^0 = 1.$$

Задача 15. Вычислить пределы функций.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)} &= 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{x-1}{x} \right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{x-1}{x} \right)^{\frac{x}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x(\sqrt[3]{x}-1)}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x(\sqrt[3]{x}-1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{x(x-1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{x}} = e^3. \end{aligned}$$

Задача 16. Вычислить пределы функций.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sin x)^{3/(1+x)} = (\sin 2)^1 = \sin 2.$$

Задача 17. Вычислить предел функции или числовой последовательности.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sin n}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n^3 - 7}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \sin n/n}{\sqrt{n}/n - \sqrt[3]{n^3 - 7}/n} = \frac{2}{-1} = -2.$$